PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES CON EL USO DE LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL WINPLOT

JAIRO ANTONIO PRECIADO LÓPEZ

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
ESCUELA DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACION
2014

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES CON EL USO DE LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL WINPLOT

JAIRO ANTONIO PRECIADO LÓPEZ

Director:
LUIS EDUARDO PEREZ LAVERDE

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
ESCUELA DE POSGRADOS
MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACION
2014

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

BOGOTÁ JULIO DE 2014

Dedico este trabajo:

Al ejemplo de mi padre
Al recuerdo vivo de mi madre
A Myriam, mi esposa, por acompañarme siempre.
A Miguel Angel y José Gabriel nuestros hijos con amor.
A mi hermanito Jaime.

AGRADECIMIENTOS

Dar gracias a los que nos ayudan a desarrollar un proyecto no simboliza solo el hecho de estar rodeado de personas que nos colaboraron sino que nos brinda la oportunidad de reconocer en cada uno de ellos su dedicación, tiempo y conocimiento puestos para que se llegue a un buen final. En tal sentido quiero agradecer a todos los que de una u otra forma estuvieron presentes a lo largo de la historia del desarrollo de este trabajo.

- **A Dios Todopoderoso y a la Santísima Virgen.** Gracias por permitirme cumplir con este sueño.

- **A mi familia:** Gracias a mi preciosa esposa y a nuestros hijos, por su amor, dedicación y por acompañarme siempre, por regalarme todo el tiempo para poder adelantar este trabajo. Por estar presente en todo momento con sus besos, abrazos y amor.

- **A mi director de tesis.** Doctor Luis Eduardo Perez Laverde, por aceptar ser mi director. Por estar dispuesto a presentar sus asesorías en los todos los momentos en que requerí de su apoyo. Por su ejemplo y disciplina tanto en la parte académica como en lo personal.

- A todos mis hermanitos por estar siempre tan pendientes, pero especialmente a Jaime por todos sus concejos y ayudas. A Hugo por sus oraciones. A Miryam por estar siempre atenta.

- A los profesores Ed. Dubinsky y Silvia Vrancken, quienes fueron contactados por correo electrónico, por su colaboración y aportes para el desarrollo de esta investigación.

- A todas las demás personas que de alguna manera contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

RESUMEN

Enmarcado dentro de la teoría APOE, propuesta por el profesor Ed Dubinsky, se propone una didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de funciones con el uso de la herramienta computacional Winplot, para la asignatura Cálculo Diferencial, en la facultad de Ingenierías de la Universidad San Martín de Bogota.

El concepto de límite es la base de los conceptos más importantes del cálculo, sin embargo, los estudiantes tienen una insuficiente comprensión de su definición formal; por tal motivo con la propuesta didáctica se pretende que los estudiantes construyan, entienda y aprendan el concepto de limite de funciones.

La propuesta se centra en desarrollar actividades de trabajo en grupo; en las que el alumno sea un participante activo en la construcción de su propio conocimiento; utilizando el modelo creado por el grupo RUMEC el cual cuenta con un ciclo que lo componen tres elementos: análisis teórico; diseño y aplicación de instrumentos; observación, análisis y verificación de datos.

Para el desarrollo de la temática en clase se trabajo con la metodología expuesta por el grupo RUMEC, denominada ACE (**A**ctividades, discusiones en el salón de **C**lase y **E**jercicios). Las actividades se desarrollan en el aula de sistemas buscando la participación activa del estudiante, las discusiones en clase se realizan en grupos colaborativos con la intervención ocasional del docente. Los ejercicios son los propuestos tradicionalmente.

Palabras claves: APOE**,** concepto de límite, software matemático.

ABSTRACT

Within the APOS theory developed by professor Ed Dubinsky, a teaching – learning didactics for the concept of function's limit is proposed by using the Winplot software, to be used in the Differential Calculus course for the Engineering Faculty of the Fundación Universitaria San Martín, Bogotá, Colombia.

The concept of limit is the key for the most important concepts in calculus, however students have a poor comprehension of its formal definition; this is why this proposal pretends that students be able to build, understand and learn the concept of limit in functions.

The proposal is based on group development activities, where the student becomes an active participant in the construction of his own knowledge; using the model created by the RUMEC group, which is a cycle composed of three elements: theoretical analysis; instrument design and application; and observation, analysis and data verification.

In order to develop the topics in class the methodology proposed by the RUMEC group was used, named ACE (Activities, Classroom discussions and Exercises). The classroom activities look for the active participation of the student, the class discussions take place in collaborative groups with ocasional intervention of the teacher. The exercises are proposed as always.

Keywords: APOS, limit concept, mathematical software.

Índice general

4. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

5. CONCLUSIONES Y PROYECCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Índice de Figuras

Índice de Tablas

CAPÍTULO 1

ARQUEOLOGIA DEL PROBLEMA

1.1 Planteamiento del problema

A lo largo de su historia, uno de los problemas con que cuenta las Instituciones de Educación Superior (IES) es el bajo rendimiento académico. Este no compete exclusivamente a los estudiantes sino más bien involucra a todos los actores de la comunidad educativa. Es por ello que para la Facultad de Ingeniería de la Fundación Universitaria San Martín este problema de bajo rendimiento académico se ha convertido en una inquietud permanente, especialmente por los resultados que muestran los estudiantes en los primeros semestres de su formación, en la asignatura de Cálculo Diferencial.

Es por todos conocido que la matemática, en general, es una de las áreas del conocimiento que mas aporta en el aumento de los niveles de bajo rendimiento académico. Según Vergnaud (1998) la dificultad de las matemáticas radica en que se necesita de un concepto para aprender otro, es decir, los conceptos están relacionados entre ellos.

Siendo el cálculo diferencial uno de los encuentros iniciales que tiene la persona al ingresar a la universidad en los primeros semestres, para nadie es un secreto que también se convierte en su primer obstáculo académico entre otros por la cantidad de conceptos fundamentales que allí se comparten, en particular el concepto de límite de funciones. En su libro de texto Spivak afirma "Entre todos los conceptos que presenta el cálculo infinitesimal, el de límite es, a no dudarlo, el mas importante, y quizás también el más difícil" (Spivak, 1996, p. 107).

“Las dos operaciones matemáticas fundamentales en Cálculo son la diferenciación y la integración. Estas operaciones implican la determinación de la derivada y la integral definida, cada una con base en la noción de límite, probablemente el concepto mas importante del Cálculo” (Leithold, 1998, p. 1).

Es de anotar que la educación está enfrentando cambios orientándose hacia un modelo activo, participativo y horizontal, dejando atrás la concepción de la enseñanza y aprendizaje como transmisión y observación (Rivas, 1996). En algunas áreas de conocimiento, el trabajo catedrático, (entendiéndose como la suma de trabajos sectoriales interrelacionados para conseguir un mismo fin, guiado exclusivamente por el profesor) es la estrategia que más beneficios le brinda a la impartición de contenidos; en otras áreas de conocimiento, este trabajo, no es la estrategia más adecuada.

A medida que la complejidad en la temática aumenta su nivel, esta metodología muestra mas debilidades dificultando los procesos de enseñanza y aprendizaje no permitiendo alcanzar un nivel optimo. Un área del conocimiento como matemáticas se caracteriza, entre otras cosas, por su lenguaje específico y su alto contenido de conceptos, por ende se pone de manifiesto que adoptar el trabajo catedrático como única metodología no arrojara lo mejores resultados.

Por lo anterior se hace necesario trabajar en esta área en un campo más interdisciplinar, utilizando para ello herramientas acordes a nuestros tiempos, que llamen y mantengan la atención de los estudiantes, fundamentalmente en la temática referente al límite.

La tecnología surge como alternativa permitiendo utilizar el computador como medio de soporte para implementar actividades mediante el uso de programas computacionales, Engler, Mülier, Vrancken y Hecklein (1997) citados por Martínez y Logreiras (2000) afirman que “la utilización de nuevas tecnologías en el proceso enseñanza – aprendizaje sirve para que el docente pueda superar el modelo comunicativo unidireccional sin descuidar la interacción humana que es la más importante”. Se quito el numeral 1.2 PREGUNTA PROBLEMA que estaba enseguida

Con base en lo anterior la pregunta problema es: ¿Qué relación existe entre la realización de actividades, que buscan la construcción, comprensión y apropiación del concepto del limite, mediante el uso de la herramienta computacional WINPLOT y los resultados académicos que obtienen los estudiante de ingeniería que estén cursando la materia de Cálculo Diferencial en la facultad de Ingeniería de la Fundación Universitaria San Martín?

1.2 Hipótesis

Con el desarrollo de actividades mediante el uso de la herramienta WINPLOT, tendientes a la construcción, comprensión y apropiación del concepto del límite, los estudiantes mejoraran sus resultados académicos en la materia de Calculo Diferencial.

1.3 Justificación

Hoy en día en que la sociedad se ha visto tan favorablemente afectada por la tecnología, no se debe descuidar ese aspecto tan importante como lo es la educación, la cual debe ir a la par con los cambios y adelantos que se están presentando día a día. En la educación (como docentes) el desarrollo de nuevas tecnologías nos obliga a imponernos nuevos objetivos de investigación y aplicación en el ámbito escolar, entre estas la importancia del computador como herramienta para la creación de nuevas actividades aportando a la conceptualización y el desarrollo de las capacidades individuales.

El uso de materiales educativos computarizados, es un intento por incorporar las nuevas tecnologías al sistema educativo tradicional, brindando un apoyo al profesor para la enseñanza o refuerzo, de los temas tratados en cada área, sin intentar remplazarlo o cambiar bruscamente los métodos empleados en el proceso.

La utilización de este tipo de herramientas ocasionan un cambio en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los cuales el estudiante se encuentra en un proceso cada vez de mayor autonomía; dejando ver que el poder de la información ya no esta en quien la tiene sino en el que la sabe utilizar, revaluando el rol del docente en el aula, mostrándolo como un orientador en la búsqueda de la construcción y utilización del conocimiento. La información por si misma no es conocimiento.

Por lo anterior, se hace imperante generar actividades prácticas que posibiliten el trabajo bidireccional entre estudiante y profesor en la educación, haciendo uso de software gratuito de libre distribución, produciendo un cambio no solo en la forma de enseñar sino en la forma de comunicar e interiorizar (aprender) los conceptos.

En la actualidad se cuenta con una diversidad de software que se pueden utilizar como herramientas didácticas en las clases de matemáticas, por ejemplo: Regla y compás; DrGeo; WinGeo; Minos 2.2; Winplot; Rotate y Geogebra entre otros. De ellos se escogió Winplot por ser un software de libre distribución, muy asequible y permitir realizar gráficos de cualquier tipo de funciones en dos y tres dimensiones. Adicionalmente es un software muy intuitivo y de fácil familiarización por parte de los estudiantes.

Al introducir actividades en las que el estudiante interactúe y participe activamente en su desarrollo transforma la clase en un proceso dinámico y motivara al alumno a ser actor principal en su aprendizaje dejando de ser un simple espectador. Tal como lo expone Luis Riquelme Pastrián: "Las herramientas computacionales, proveen de entornos de trabajo que conllevan a nuevas formas de tratar metodológicamente los contenidos seleccionados. El recurrir a medios didácticos de software se transformará en valor agregado al proceso de enseñanza y aprendizaje en función de las posibilidades del software y la capacidad del maestro para estructurar metodológicamente los medios".

1.4Objetivos

1.4.1 General

Establecer la correlación entre el uso de actividades realizadas en el computador con la herramienta WINPLOT, en el aprendizaje del concepto de límite, y el rendimiento académico de los estudiantes de segundo semestre de ingeniería de la Fundación Universitaria San Martín.

1.4.2 Específicos.

1.4.2.1 Organizar una prueba de entrada, como herramienta que permita detectar los temas en que los estudiantes necesitan refuerzo.

1.4.2.2 Valoración y validación por parte de docentes de diferentes universidades de la prueba de entrada, con el fin de hacerla lo más especifica posible.

1.4.2.3 Diseñar y desarrollar actividades referentes a la temática límite de funciones de una variable usando la herramienta Winplot.

1.4.2.4 Analizar comparativamente los resultados alcanzados por los estudiantes, sujetos del estudio.

1.5 Estado del arte

Silvia Aquere, Adriana Engler, Silvia Vrancken, Daniela Müller, Marcela Hecklein, María Inés Gregorini y Natalia Henzenn (2006), formulan una propuesta didáctica para la enseñanza del límite para los estudiantes cursantes de la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias Agrarias en la Universidad Nacional del Litoral, Provincia de Santa Fe en Argentina. Lo que pretenden es que los alumnos lleguen a la reconstrucción del concepto de límite enfocados en efectuar una serie de actividades, trabajadas en forma grupal, para superar dificultades de aprendizaje del concepto de límite. Este trabajo culminó en el 2007 y fue desarrollado en Argentina, el resultado de esta propuesta didáctica fue favorable.
http://www.soarem.org.ar/Documentos/40%20Engler.pdf

Nydia Dal Bianco, Rosana Botta Gioda, Nora Castro y Mei Yi Lee, Aplicando la metodología de la Ingeniería Didáctica realizaron el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de límite; en el trabajo proponen una alternativa para la enseñanza del concepto de límite, utilizando distintos registros de representación. La propuesta fue diseñada para ponerla en práctica con los estudiantes que están cursando matemáticas en primer año de las carreras del Profesorado en Química y Profesorado en Ciencias Biológicas de la Facultad de Ciencias Exactas

y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa en Argentina. Este trabajo culmino en el 2008 y el resultado de esta propuesta didáctica fue favorable.
http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/comunicaciones/Propuestas/C39.pdf

A. Engler, S. Vrancken, M. Hecklein, D. Müller y M. I. Gregorini (2006), en su trabajo analizaron la implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita, Según los autores, en su diseño se tuvieron en cuenta las nuevas tendencias de la didáctica y las dificultades que mostraron los alumnos; coleccionadas durante su practica docente con varios años de experiencia. Se trabajan los términos: aproximaciones, límites laterales, la existencia de límite, la existencia o no de la imagen de la función en el valor hacia el cual tiende la variable, el valor de la función y el valor del límite. Este trabajo culmino en el 2007 y el resultado de esta propuesta didáctica fue favorable
http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_011.pdf

Marta B. Fernández Casuso (2000), propone un sistema didáctico para la enseñanza del tema: límite de una función de una variable con el uso de un asistente matemático para la asignatura Matemática I, en la Carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones, en Cuba, utilizando el software DERIVE, como apoyo en sus actividades propuestas para desarrollar este tema. La propuesta arrojo resultados favorables. Se termino de desarrollar en el 2000 en Cuba.
http://www.clame.org.mx/relime/200003b.pdf

Indira Bustos González (2013), realiza una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del Geogebra en la Institución Educativa Técnica María Auxiliadora de Fresno Tolima. Esta estrategia didáctica se basa en la visualización. Este trabajo permitió a los estudiantes ser mas participativos en la en los procesos de enseñanza aprendizaje lo que redundo en una notable mejora en las calificaciones que obtuvieron. La propuesta fue aplicada a mediados del año 2012. Los resultados obtenidos fueron favorables.
http://www.bdigital.unal.edu.co/9500/

Con la revisión de documentos se hizo palpable que la incorporación de nuevas metodologías en las que se involucre la tecnología como herramienta en el aula muestra resultados favorables en la participación de los estudiantes en los procesos de enseñanza aprendizaje y en la comprensión de la temática desarrollada.

En general, en la revisión de la literatura se apreció que al integrar de manera eficaz los recursos computacionales a los procesos de enseñanza aprendizaje se observaron ventajas como:

• El estudiante es un participante activo en la construcción de su aprendizaje.
• Se logran controles del tiempo y secuencia del aprendizaje del alumno.
• Retroalimentación inmediata y aprendizaje de los errores (interacción alumno – máquina).
• Trabajo colaborativo.

De otra parte, la educación tradicional ha dado gran importancia al aspecto algebraico, lo que conduce a generar una perspectiva muy limitada por parte de los estudiantes de los conceptos que se manejan en matemática. Para nadie es un secreto que estos conceptos son abstractos y si se logra que los estudiantes visualicen de manera dinámica lo que comúnmente se dibuja en el tablero (estático) se conseguirá que "las ideas abstractas más complejas pueden convertirse en una forma intuitiva que esté al alcance del que aprende para ayudarle a llegar a la idea abstracta que debe ser dominada" (Bruner, 1972)

1.6 Metodología

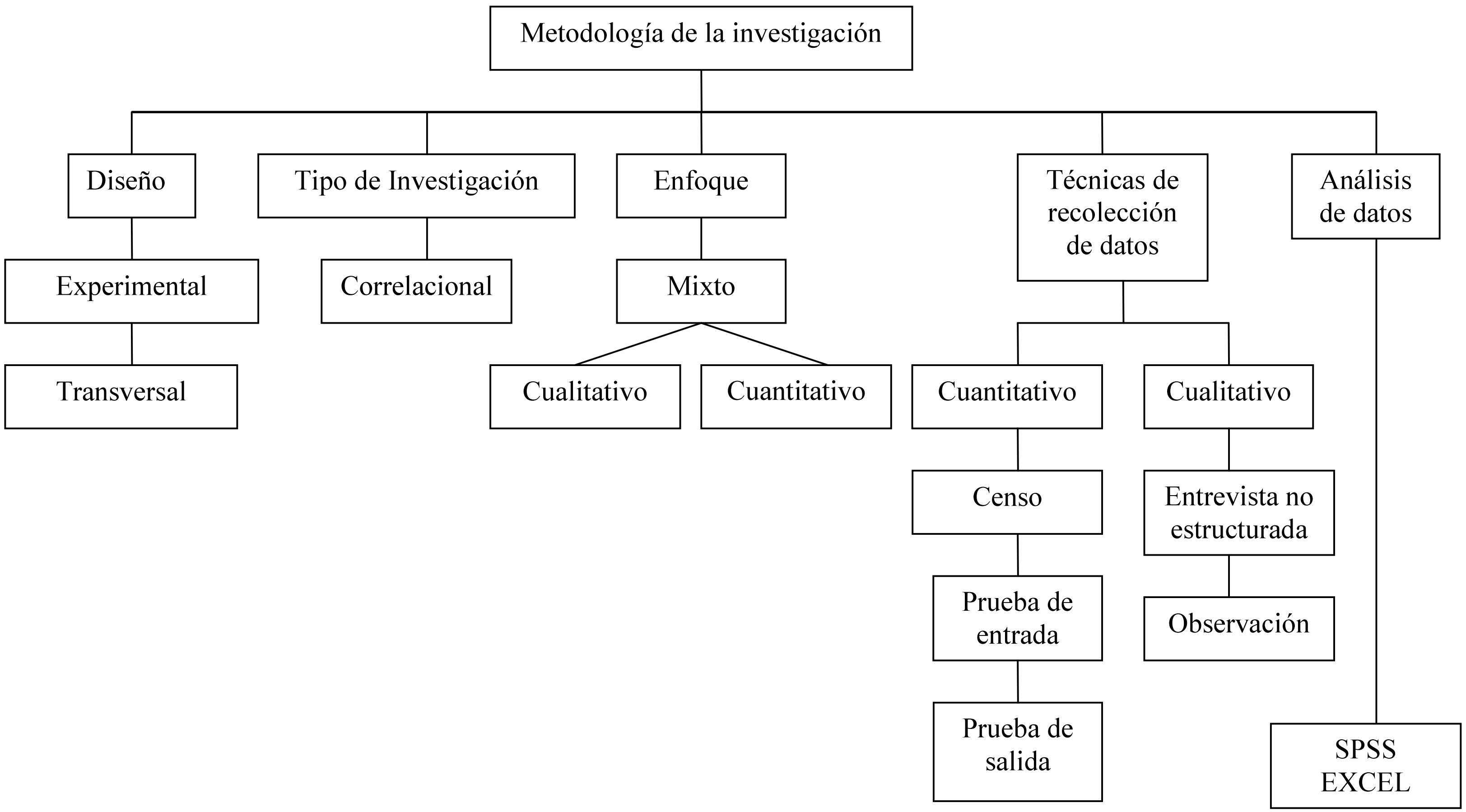


Figura 1.1. Esquema de la metodología de esta investigación**.**

MARCO METODOLOGICO

A continuación se describe la metodología que se empleo en el desarrollo de este trabajo así como la manera en que se llevo a cabo. Se muestra el diseño, tipo y enfoque de investigación, así como las técnicas e instrumentos usados para la recolección de datos.

1.6.1 Diseño de la investigación

El diseño experimental permite "la manipulación intencional de una o mas variable independientes", (Hernández; Fernández, y Baptista, 2006 p. 161) para luego "medir el efecto que la variable independiente tiene en la variable dependiente". (Hernández; Fernández, y Baptista, 2006 p. 168).
En este trabajo se utilizó el diseño experimental, ya que durante un semestre se introdujo el manejo del programa Winplot a la clase de cálculo diferencial del grupo experimental.

1.6.2 Tipo de Investigación

De los cuatro tipos de investigación existentes; descriptiva, exploratoria, correlacional y explicativa; se decidió utilizar el correccional por estar en concordancia con las preguntas que motivaron este trabajo. Este tipo de investigación "tiene como propósito conocer la relación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular" (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006 p.104). Para el caso que nos ocupa las variables que se relacionaran son: el desarrollo de las actividades con la ayuda de la herramienta Winplot y los resultados académicos obtenidos por los estudiantes en el tema de límites de funciones.

1.6.3 Enfoque de investigación

El enfoque por medio del cual se llevo a cabo la investigación es de corte mixto, el cual se puede entender como "un proceso que recolecta, analiza y vincula datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio o una serie de investigaciones para responder a un planteamiento del problema" (Teddie y Tashakkori, 2003; Creswell, 2005; Mertens, 2005; Williams, Unrau y Grinell, 2005, citado en Hernández Sampieri, et al. 2006, p. 755). Esta elección se dio por la necesidad de obtener información cualitativa y cuantitativa; la parte cualitativa se fundamento en la adquisición de datos mediante entrevistas y diálogos con docentes de diferentes universidades, mientras que la segunda es relevante para la obtención de datos numéricos con los que se desarrollaron análisis estadísticos.

1.6.4 Técnicas de recolección de datos

Se elaboro un censo con el ánimo de caracterizar la población en cuanto a edad, genero, carrera y estrato entre otros.

En cuanto a la información cuantitativa el instrumento que se utilizo fue la prueba escrita, la cual fue aplicada a todos los estudiantes que formaron parte del estudio. En lo que tiene que ver con lo cualitativo se llevaron a cabo diálogos a manera de entrevista con docentes de diferentes universidades. Con el grupo de estudiantes se uso la observación que "No es mera contemplación (sentarse a ver el mundo y tomar notas); nada de eso, implica adentrarnos en profundidad a situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones" (Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, 2006, p.587). La participación del docente durante la investigación se puede catalogar como Participación Activa, en la que el observador "participa en la mayoría de actividades; sin embargo, no se mezcla completamente con los participantes, sigue siendo ante todo un observador" (Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, 2006 P.596).

1.6.5 Instrumentos de recolección de datos

Se desarrollaron dos pruebas, como instrumento cuantitativo, una de entrada y otra de salida a manera de cuestionario que "consiste en un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir" (Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, 2006 p.310).

1.6.6 Población

Para este estudio se contó con una población conformada por estudiantes de la Fundación Universitaria San Martín que se encontraban matriculados en la Facultad de Ingeniería en alguna de las carreras de: Ingeniería de Sistema, Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicaciones: y que se encontraran inscritos a la materia de Calculo Diferencial. Se tomaron los dos grupos, uno de la jornada diurna y el otro de la jornada nocturna.

1.6.7 Metodología.

Para el desarrollo de esta investigación se tomo como enfoque la metodología propuesta en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), que consiste en un ciclo compuesto por tres elementos a saber: análisis teórico; diseño y aplicación de instrumentos; observación, análisis y verificación de datos. El ciclo de investigación brinda la oportunidad de obtener una mejor descripción de los conceptos matemáticos mediante su repetición.

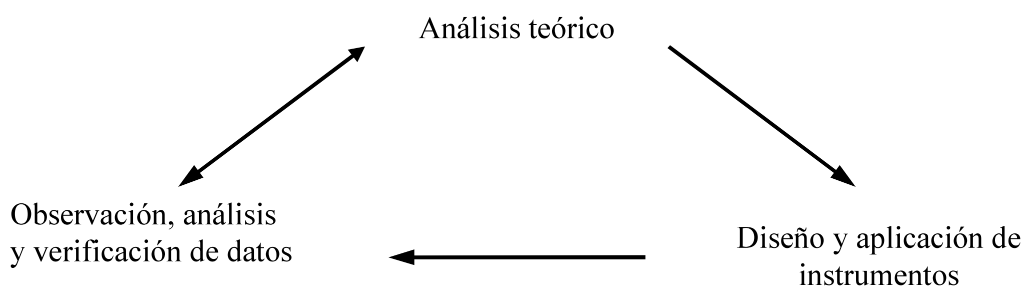


Figura 1.2. Ciclo de investigación

Este ciclo es un modelo dinámico que permite ir afinando el análisis teórico y los instrumentos a medida que se analizan y verifican lo datos obtenidos.

A continuación se presenta una breve descripción de cada una de las componentes del ciclo. *Análisis teórico*: Se inicia con un estudio de los conceptos previos que se deben conocer para afrontar con mayor seguridad y solidez el concepto matemático que se quiere estudiar. Este es el primer paso para realizar una descomposición genética de un concepto.

Diseño y aplicación de instrumentos: Se debe realizar una valoración encaminada a dictaminar si los estudiantes tienen claridad del sustento teórico que se ha estimado en el análisis teórico.

Observación, análisis y verificación de datos: Posterior a la aplicación del instrumento se consiguen datos que muestran si las destrezas y conocimientos previos contribuyen a la investigación. De no ser así, se deberá revaluar y refinar los instrumentos y reiniciar el proceso.

1.7 Cronograma

ACTIVIDAD	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	E	F	M	A	M
Identificación del problema	✓	✓														
Recopilación y revisión preliminar de la información		✓	✓	✓	✓	✓										
Formulación del problema, planteamiento		✓	✓													
Justificación, hipótesis			✓	✓												
Objetivos, Metodología				✓	✓	✓	✓									
Revisión bibliográfica, estado del arte y marco teórico					✓	✓	✓	✓	✓							
Diseño y construcción de las actividades					✓	✓	✓									
Aplicar una prueba de entrada							✓									
Asistencia a evento académico									✓							
Aplicación de la propuesta							✓									
Aplicar una prueba de salida.										✓	✓					
Redacción del artículo para publicar.								✓								
Recolección de datos y Tabulación								✓	✓	✓	✓					
Análisis de Resultados											✓	✓	✓			
Conclusiones.												✓	✓	✓		
Comités de evaluación.															✓	
Preparación de sustentación.															✓	
Sustentación.															✓	

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Referente Didáctico: Teoría APOE

Tomando como base la ideología de Piaget y en cabeza de Dubinsky, el grupo de investigadores RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) propone la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) implementando el ciclo de enseñanza ACE (**A**ctividades, discusiones en el salón de **C**lase y **E**jercicios), los cuales tiene como objetivos lograr entender de una mejor manera la forma en que se da el aprendizaje y desarrollar una pedagogía que tenga fundamento en dicha teoría para poder utilizarla en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario.

La teoría APOE se basa principalmente en dos ideas desarrolladas por Jean Piaget cuando estudio sobre el pensamiento de los adolescentes y los adultos en referencia a asuntos matemáticos. Este estudio lo condujo a encontrar características comunes referentes a las estructuras mentales y los mecanismos de adquisición de un concepto.

La primera de esas ideas corresponde al *supuesto del conocimiento matemático,* que es la tendencia que muestra un individuo al responder ante escenarios que presentan situaciones con problemas matemáticos y su reflexión en un contexto establecido.

La otra, *hipótesis sobre el aprendizaje,* la persona no puede aprender conceptos matemáticos directamente sino que recurre a las estructuras mentales para entender el sentido del concepto. Si la persona posee las estructuras mentales adecuadas su aprendizaje se vera facilitado, por el contrario, si las estructuras mentales están ausentes, apropiarse de un concepto será muy difícil.

Por otra parte, de acuerdo a lo que establece el grupo, el conocimiento matemático de una persona "es su tendencia a responder a problemas matemáticos por reflexión sobre los mismos, y sus soluciones son dadas en un contexto social. Estas soluciones se alcanzan mediante la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos, organizando éstos en esquemas para posteriormente usarlos en situaciones determinadas" (Asiala et al., 2000, p. 7).

Por lo anterior, la enseñanza debería tener como objetivo construir estrategias que faciliten la creación de estructuras mentales por parte de los estudiantes y que a su vez el estudiante haga uso de las estructuras que ya posee en la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos. Dentro de la teoría APOE las estructuras mentales son acciones, procesos, objetos y esquemas; que son las que constituyen su sigla. A continuación se describen cada una de estas brevemente con base en lo establecido por Weller, Arnon y Dubinsky (2009).

Acción: Es una transformación que realiza el estudiante de un objeto, motivado por estímulos externos, que pueden ser físicos o mentales. Dicha transformación se origina como respuesta a una información que se presenta como pauta sobre los pasos que siguen.

Proceso: Cuando se da la repetición de una acción y el estudiante analiza y reflexiona sobre ella en un procedimiento autónomo, sin mediar ningún estimulo externo. Un proceso es la interiorización de una acción; adicionalmente dos o mas procesos pueden organizados de manera que de ellos se obtiene un nuevo proceso.

Objeto: En el momento en que un estudiante reflexiona sobre las operaciones que se efectuaron a un proceso, lo concibe como un todo siendo capaz de identificar todas las transformaciones, sean acciones o procesos, que se efectuaron sobre él, se dice que el proceso fue encapsulado en un objeto.

Para el grupo RUMEC la manera de entender un concepto matemático inicia con el procesamiento de un objeto, que puede ser mental o físico, con el fin de generar acciones que serán interiorizadas y repetidas para lograr procesos. De la reflexión hecha sobre las operaciones efectuadas sobre los procesos se formaran nuevos objetos. Finalmente acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas.

La idea de esquema también es tomada de Piaget; según la teoría APOE la definición de esquema esta dada de la siguiente manera:

Esquema: Es la compilación mental de acciones, procesos, objetos y otros esquemas. Estando relacionados consciente o inconscientemente de manera coherente. En el momento cuando el estudiante se enfrenta a un problema matemático recurre a los esquemas con que dispone para poder resolverlo. Es de esperarse que cuanto más alto sea el grado de formación del estudiante mayor sea el número de estructuras conceptuales relacionadas posea y que puedan ser usadas de manera pertinente.

La manera en que un estudiante pasa de una fase a otra dentro de la construcción del conocimiento matemático se da por la abstracción reflexiva, que es una herramienta mental que le brinda al estudiante la posibilidad de deducir las propiedades de los objetos a partir de las acciones y las relaciones que se puedes establecer entre objetos, lo que permite tener una organización mental de orden superior. Así, la construcción del conocimiento matemático se da por diferentes abstracciones reflexivas que se hacen de manera secuencial hasta conseguir la edificación de manera coherente de esquemas ligados a un concepto matemático.

Las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos) son organizadas en un esquema en el que se establecen nuevas relaciones. El esquema puede llegar a ser considerado como un nuevo objeto, y se establece que este objeto se ha dado por la encapsulación de procesos. Los objetos, a su vez, pueden ser desencapsulados invirtiendo el proceso por el cual fueron formados.

En esta teoría se estima que cualquier concepto matemático que se desee aprender necesita de una descomposición genética, que es "un conjunto estructurado de construcciones mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo" (Asiala et al., 1996); es decir, es la representación de un posible proceso que el estudiante realiza en su mente con el fin de aprender un concepto. Para lograr dicha representación es necesario conocer el objeto inicial como también saber que acciones y procesos se demandan para su transformación.

En la abstracción reflexiva estructurada por el grupo RUMEC se caracteriza por contar con los siguientes mecanismos: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y generalización.

Interiorización, es una construcción mental que el estudiante realiza sobre las acciones implementadas sobre un objeto. Las acciones se interiorizan en procesos.

Coordinación, corresponde a los acciones para tomar procesos y combinarlos para lograr un nuevo proceso.

Inversión, luego que un proceso se da, el estudiante es capaz de regresar sobre sus pasos y realizar la reconstrucción de las acciones para llegar al original.

Encapsulación, es el paso de conversión de un proceso (estructura dinámica) en un objeto (construcción mental estática).

Desencapsulación o reversión, es el proceso inverso de la encapsulación.

Generalización, se relaciona con la capacidad del individuo para utilizar un esquema ya contextualizado en un contexto diferente.

Para que un estudiante logre la comprensión de un concepto matemático, el ha de originar: acciones, que son transformaciones de objetos motivadas por estímulos externos; procesos, que se pueden catalogar como acciones pero sin mediar los estímulos externos; objetos: cuando el estudiante es consiente de las transformaciones (acciones o procesos) que actúan en el proceso, y logra reconstruirlas entonces está pensando en el proceso como un objeto. En este momento se dice que los procesos se han encapsulado en un objeto.

A continuación se presenta el esquema planteado por el grupo RUMEC para entender un concepto matemático.

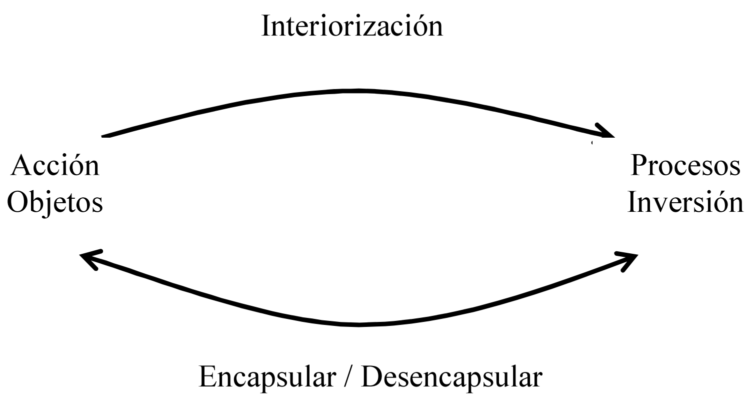


Figura 2.1. Esquema para entender un concepto matemático

2.1.1 La Metodología ACE

La metodología ACE propone tres tipos de secciones a saber:
Actividades (A). Se realizan con la ayuda de un computador, los estudiantes desarrollan actividades en las que se deban resolver problemas matemáticos, escribir definiciones y realizar pruebas. Con las actividades se persigue que estas afecten la mente el estudiante.

Discusiones en el salón de clase (C), estas se desarrollan formando grupos dentro del salón de clase, los cuales no deben ser de mas de cuatro integrantes, que deben realizar un trabajo colaborativo de manera comprometida con una participación constante y activa de todos y cada uno de los integrantes buscando que logren un aprendizaje significativo. En los casos que sea necesario el docente debe formar parte del grupo dando las explicaciones a que haya lugar.

Ejercicios (E). Son los propuestos tradicionalmente, y deben ser asignado a cada grupo de trabajo para que sean desarrollados fuera del horario de clase. La idea es que los estudiantes refuercen las ideas que han construido para usar las matemáticas que han aprendido o para empezar a pensar acerca de situaciones que pueden ser estudiadas después.

2.1.2 La evaluación en la teoría APOE

El método evaluativo que se propone en esta teoría requiere de una actitud participativa y decidida por parte de los estudiantes relacionada a su aprendizaje. Se contemplan actividades en grupo (máximo de cuatro integrantes) con el fin de incitar el aprendizaje colaborativo, lecturas con su respectivo análisis reflexivo, actividades con la ayuda del computador y puesta en común de todos el grupo de estudiantes en la búsqueda de la construcción del concepto que se esta estudiando.

Las actividades que se tendrán en cuanta para la evaluación son:

a) Actividades en el computador. Se desarrollan en el aula de sistemas y son realizadas por grupos de trabajo dentro del horario de clase. El resultado se entrega al profesor y este le asigna una calificación; se sugiere que sume un 10% de la nota total del periodo.

b) Discusiones en el aula de clase. Se dan después del desarrollo de la clase en el salón de sistemas, tiene por objeto discutir sobre la actividad desarrollada en el computador, también se sugiere que sume un 10% de la nota total del periodo.

c) Ejercicios para la semana. Son los usuales para el tema, se desarrollan en grupo y se entregan la última sesión de clase de la semana. Tendrán un porcentaje de 20% de la calificación total.

d) Primer examen. Se resuelve en grupo y todos los integrantes tendrán la misma nota, esta corresponderá al 60% de la total del corte.

e) Segundo examen. Esta prueba será resuelta de manera individual y cada miembro del grupo recibirá dos calificaciones, la que obtuvo al desarrollar su examen y la otra corresponde al promedio de las que obtuvieron sus compañeros de grupo. La primera vale el 40% mientras que la segunda el 20%; a estas cantidades se le suma el 10% de las actividades en el computador más 10% de discusiones en el aula de clase y el 20% de ejercicios para la semana, esto para el segundo corte.

f) Tercer examen. Se procede de la misma forma que en el segundo examen, manteniendo los mismos porcentajes.

Si se cumplen con todo lo anterior, con la completa participación de los estudiantes en todas y cada una de las actividades propuestas y resolviendo sus pruebas escritas a cabalidad, RUMEC concluye que las construcciones mentales se desarrollaron y por ende se aprendieron los conceptos matemáticos que se querían.

2.1.3 Descomposición genética del concepto de límite

Siguiendo lo establecido por la teoría APOE, Cottrill y sus colaboradores, (1996) estudiaron las construcciones mentales acciones, procesos, objetos y esquemas para el concepto de límite, en un intento de crear un modelo con el fin de establecer como se construye en la mente del individuo dicho concepto. A este modelo se le da el nombre de descomposición genética.

En Cottrill (1996) se encuentra una descomposición genética del límite de una función $f(x)$ en un punto a, desarrollado en seis pasos como sigue:

1. La acción de evaluar la función $f(x)$ en unos pocos puntos cercanos a a, cada punto sucesivo más cerca de a que el anterior, muy próximo a a, o incluso igual a a.

2. Interiorización de la acción del paso anterior en un único proceso en el que *f(x)* se aproxima a L como se x se aproxima a a. Es decir, analizar el proceso "x se acerca a a" para alcanzar el proceso "*f(x)* se acerca a L"

3. Encapsular el proceso del paso 2, de modo que, por ejemplo, al hablar acerca de las propiedades de combinación de límite, el proceso de límite se convierte en un objeto al que se le puede aplicar las acciones.

4. Reconstruir el proceso del paso 2 en términos de intervalos y desigualdades. Esto se hace mediante la introducción de estimaciones numéricas de aproximaciones, en símbolos matemáticos correspondería a $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$

5. Aplicar un esquema de cuantificación para conectar el proceso de reconstrucción de los pasos anteriores con el fin de conseguir la definición formal del límite. La aplicación de esta definición es un proceso en el que uno se imagina la iteración a través de todos los números positivos y, cada uno lo llama ε.

6. Se hace una concepción completa de $\varepsilon - \delta$ a situaciones específicas.

2.2 REFERENTE ESTADÍSTICO

Si bien, la finalidad de este estudio no es el de realizar la validación de un instrumento, si es necesario hacer un estudio sobre la pertinencia de las pruebas que se aplicaron a los estudiantes con el fin de evidenciar el aporte de estas a la investigación.

2.2.1 Prueba de Normalidad

Cuando se realiza una prueba que implica variables cuantitativas es indispensable establecer si los datos obtenidos se comportan conforme a una distribución normal. Dentro de la estadística se encuentran pruebas que permiten determinar si los datos se comportan de forma normal o no; entre otras se encuentran el Test de Shapiro–Wilk, la prueba de Ji-cuadrado y la prueba Kolmogorov-Smirnov; siendo esta ultima la seleccionada para este estudio.

2.2.2 Prueba de Hipótesis

La prueba de hipótesis es un procedimiento estadístico que utiliza datos de una muestra para evaluar la credibilidad de una hipótesis sobre una población. En una prueba de hipótesis se tienen dos afirmaciones o hipótesis opuestas acerca de un parámetro de la población. A la primera se le llama la hipótesis nula (H_0), mientras que a la otra se le llama hipótesis alterna (H_1).

2.2.3 Cociente de varianzas

Con frecuencia se requiere comparar la precisión de dos instrumentos, la eficiencia de dos procesos de manufactura o las calificaciones de dos poblaciones. Para satisfacer esta necesidad se dispone de un método estadístico conocido como cociente de varianzas. Para su aplicación se toman las dos hipótesis: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ donde $\sigma_1 \; y \; \sigma_2$ corresponde a las desviaciones estándar. La formula para calcular el cociente de varianzas esta definida por: $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$: en donde $S_1 \; y \; S_2$ corresponde a las varianzas.

2.2.4 Diferencia de medias

La diferencia de medias evalúa si las medias de dos poblaciones son estadísticamente diferentes una de la otra. Esta prueba es de gran utilidad cuando se desea saber si existe diferencia entre los resultados obtenidos al aplicar una prueba a dos grupos diferentes. Esta prueba esta definida por: $z = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ en donde $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias de la observación; S_1 y S_2 son las desviaciones estándares; n_1 y n_2 son los tamaños de cada muestra.

2.2.5 El coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson es un valor estadístico que determina la relación lineal entre dos variables cuantitativas (X,Y). Comúnmente es denotado por; y toma valores que están en entre -1 y 1. El cálculo del coeficiente de correlación lineal se realiza dividiendo la covarianza por el producto de las desviaciones estándar de ambas variables: $r = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$, en donde σ_{XY} es la covarianza de (X,Y), σ_X y σ_Y son las desviaciones típicas de X e Y.

Para este estudio se utilizó en la medición de la consistencia de las preguntas de las pruebas y su cálculo fue realizado en Excel.

2.2.6 Alfa de Crombach

El Alfa de Crombach esta definido por la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum S_i^2}{S^2}\right)$$

en donde k representa el número de preguntas; $\sum S_i^2$ representa la suma de las varianzas de las preguntas y S^2 la varianza del puntaje total. Su rango de valores esta entre 0 y 1. Cuanto más se acerque el índice al extremo 1, mejor es la fiabilidad; se considerando una fiabilidad respetable a partir de 0,70.

Es uno de los coeficientes mas usados en la validación de pruebas pues mide la confiabilidad de la prueba en función de las preguntas y el cociente de la varianzas.

2.2.7 U de Mann-Whitney

La prueba U de Mann-Whitney es un procedimiento no paramétrico para comparar los valores de dos variables cuantitativas u ordinales de dos muestras independientes que pueden tener tamaños distintos. Se utiliza para comparar dos grupos de rangos (medianas) y determinar que la diferencia no se deba al azar, es decir, que la diferencia sea estadísticamente significativa. Para encontrar la U de Mann-Whitney se realizan los cálculos utilizando la siguiente expresión:

$U = n_1 n_2 + \frac{n_x(n_x+1)}{2} - R_x$: en n_1 y n_2 representan el tamaño de las muestras, n_x el tamaño de la muestra que obtuvo el mayor de los totales de rangos y R_x representa el mayor de los totales rangos.

La U de Mann-Whitney presenta una expresión que permite calcular su equivalencia con una distribución normal estándar. Dicha expresión esta dada por:

$Z = \frac{U - \frac{n_1 * n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 * n_2 * (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$; en donde n_1 y n_2 representan el tamaño de las muestras

2.3 PSICOMETRÍA

La psicometría es la rama de la psicología que se encarga de la medición de los fenómenos psíquicos valiéndose de procesos estadísticos.

En nuestra vida diaria nos resulta familiar el medir propiedades físicas de los cuerpos como: peso, masa, temperatura, entre otros, con instrumentos estandarizados para tal fin. Existen otras características inherentes a las personas que son objeto de estudio de la psicología como la actitud, el coeficiente intelectual, la postura frente a un tema, etcétera; las cuales no pueden ser medidas directamente y de manera precisa. Sin embargo se cuenta con instrumentos que permiten realizar estas mediciones que se denominan Test.

2.3.1 Índice de dificultad

El índice de dificultad de una pregunta *j* esta definido como:

$$P_j = \frac{A_j}{N_J}$$

en donde P_j representa el cociente entre la cantidad de personas que han dado la respuesta correcta A_j, y la cantidad de personas que intentaron resolver la pregunta N_j. Las personas que no contestaron no entran en el conteo de N_j. El valor de P_j estará en 0 y 1. De acuerdo con las categorías establecidas por Bazan, citado por García Barco (2012), las preguntas, ítems o reactivos se pueden clasificar así:

Índice de dificultad	
MF: Muy Fácil	MF $\geq$ 0,75
F: Fácil	0,55 $\leq$ F<0,75
N: Normal	0,45 $\leq$ N<0,55
D: Difícil	0,25 $\leq$ D<0,45
MD: Muy Difícil	MD < 0,25

Tabla 2.1. Categorías del índice de dificultad

2.3.2 Índice de Homogeneidad

Se define como la correlación de Pearson entre las puntuaciones de los sujetos en el ítem j y las puntuaciones X en el total del test, comúnmente se denota por r_{jx}. Debe estar entre -1 y 1 y caso mide la consistencia del ítem en el test.

En la siguiente tabla se muestran los rangos establecidos para este coeficiente según Bazan citado por García Barco (2012).

Índice de Homogeneidad	
P: Pésima-descartar	$P < 0$
PD: Pobre-Descartar	$0 \leq PD < 0,2$
RR: Regular-revisar	$0,2 \leq RR < 0,29$
BM: Bueno-Mejorar	$0,29 \leq BM < 0,39$
C: Conservar	$C \geq 0,39$

Tabla 2.2. Rangos del índice de homogeneidad

2.3.3 Índice de Discriminación

El índice de discriminación es una medida que muestra la eficacia del reactivo para discriminar entre los puntajes altos y los bajos que obtienen los sujetos al presentar una prueba. Entre más elevado sea el índice resultara más eficaz para establecer la diferenciación.

Se cuenta con varias maneras para calcular este índice. En este caso por tratase de una prueba de rendimiento académico el procedimiento sería el indicado por Dawson y Thomas, citado por Ruiz Bolívar, el cual se expresa en la fórmula siguiente:

$D_j = \frac{GA_j - GB_J}{N}$, en donde GA_J es el número de respuestas correctas del grupo de personas con las puntuaciones más altas, GB_J es el número de respuestas correctas del grupo de personas con las puntuaciones más bajas y N es el número de personas en el grupo más numeroso.

2.4 REFERENTE MATEMÁTICO

A continuación se presenta una breve historia del concepto de límite de funciones.

El concepto de límite es la base teórica del análisis infinitesimal. Fue estudiado por muchos matemáticos durante varios años; tal como se presenta hoy en día es gracias al matemático alemán Karl Weierstrass que entre 1854 y 1860 dio la definición que conocemos.

La concepción de límite no estaba presente en los antiguos griegos, sin embargo, ellos calculaban el área de figura tales como el círculo utilizando el método de agotamiento o exhaución, que consiste en cubrir una región tanto como fuese posible con triángulos de diferentes dimensiones, luego calculaban el área de cada uno de los triángulos y sumaban dichas áreas. Este método de exhaución fue muy utilizado por Arquímedes en el calculo de áreas y volúmenes. Tal vez este método es el referente más cercano a la idea de límite que se tiene de la época.

Johannes Kepler (1571-1630) desarrolla el método de los infinitésimos que se basa en la hipótesis de que todos los cuerpos se pueden descomponer en infinitas partes muy pequeñas de áreas o volúmenes que ya se conocen. Galileo utilizo un método semejante para hacer demostraciones físicas tal como que el área bajo la curva de la grafica tiempo vs velocidad es el espacio.

Isaac Newton (1648-1727) muestra su teoría de fluxiones, basado en la noción de movimiento continuo, mientras que Leibnitz (1646-1716) presenta su trabajo sobre el análisis infinitesimal mediante la teoría sobre las diferenciales. La concepción de límite que aparece con estas dos teorías es de naturaleza geométrica.

Leonhard Euler (1707-1743) basándose en la teoría de diferenciales de Leibnitz y el método de Newton los reúne en un área de las matemáticas que toma el nombre de *Análisis* y se ocupara de los procesos infinitos.

Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) desarrolla una teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. En el tomo IX de su obra se puede leer la definición del límite:

> *"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable".*

Si bien es la primera aproximación formal al concepto de límite, se queda corto pues esta dada solo para un límite lateral por tanto la cantidad que se aproxima no puede superar la otra.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Vuelve sobre el concepto dado por D'Alembert, deja de lado los infinitésimos y las velocidades de cambio, desechando la representación geométrica proporcionándole un carácter más aritmético, más riguroso pero aún impreciso. La definición de límite que propone Cauchy (1821) es la siguiente:

> "…, *cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".*

Karl Weierstrass (1815-1897) expuso un enunciado muy semejante al que se conoce en la actualidad, este se puede ver en la obra de *Elemente* que fue escrita por Heinrich Heine, quien fue su discípulo:

Si, dado cualquier ε*, existe un* n_0*, tal que para* $0<n<n_0$*, la diferencia* $f(x_0 \pm n)-L$ *es menor en valor absoluto que* ε*, entonces se dice que* L *es el límite de* $f(x)$ *para* $x=x_0$

Este concepto de límite es tomado como base para otros tales como: continuidad, derivada e integral. En el siglo XX aparecen concepciones topológicas sujetas a conceptos dados sobre conjuntos cuyos elementos no son números, lo que permitió presentar la definición formal de límite:

Sea ***f*** *una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número* ***a****, excepto posiblemente en* ***a*** *misma. Decimos entonces que* ***el límite de f(x) cuando x tiende a a es L, y escribimos:*** $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *, si para cada número* $\varepsilon > 0$ *hay un número correspondiente* $\delta > 0$ *tal que* $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < \left| x - a \right| < \delta$

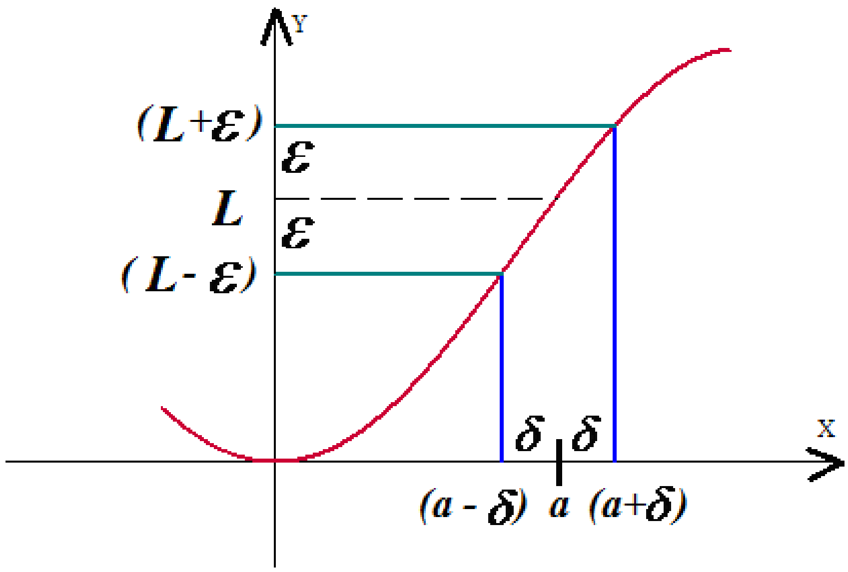


Figura 2.2. Esquema del concepto formal de límite

Para lograr esta definición (comúnmente llamada definición Epsilon (ε) - Delta (δ)) fueron necesarios varios siglos de formalización del lenguaje matemático. Lo más relevante de esta definición, no es que antes de que apareciera desconociéramos el concepto de límite de una función en un punto, es que no se sabía plasmar esta idea abstracta en el lenguaje matemático en este caso.

CAPÍTULO 3

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

3.1 ¿CÓMO SE PROCEDIO?

Teniendo por objetivo la demostración de la hipótesis formulada, a finales del mes de julio de 2013 se trabajo con dos grupos de estudiantes de la facultad de ingeniería de la Fundación Universitaria San Martín, sede Bogotá, que se encontraban cursando la asignatura de Cálculo diferencial, dicha asignatura corresponde al segundo semestre del plan de estudios en la facultad. Los estudiantes de ingeniería de la Universidad San Martín cursan en primer semestre la asignatura Precálculo, que busca dotar al estudiante de las herramientas algebraicas y geométricas necesarias para un desempeño óptimo en los demás cursos del área y en aquellos donde las aplicaciones matemáticas son de vital importancia, según esta establecido en el proyecto pedagógico de aula que rige en la facultad de Ingeniería de la Fundación Universitaria San Martín. Cada grupo toma clase en distintas jornadas, diurna y nocturna, Al grupo de la mañana se denominara A y al de la noche B.

Se tuvo entrevista informal con varios docentes de algunas universidades (Fundación Universitaria San Martín, Universidad Sergio Arboleda, Escuela Colombiana de Carreras Industriales) con el fin de conformar un listado de los temas que los estudiantes debería conocer para poder enfrentar el tema de limites, haciendo un compilado general de tales temas se realizo el diseño de la prueba diagnostica para aplicarla a lo estudiantes con el fin de planear clases de nivelación y refuerzo para los alumnos, con el fin de estandarizar su nivel de preconceptos para enfrentar el tema de limites. Esta actividad se desarrollo en el mes de abril de 2013.

La prueba diagnóstica fue revisada y valorada por profesores expertos, que no habían sido entrevistados, con el propósito de afinarla y tener un base más sólida en el planteamiento de las actividades iniciales que se le presentarían a los estudiantes. A continuación se presenta un esquema que muestra el itinerario que se llevo a cabo para la consecución de la ultima versión de la prueba diagnostica.

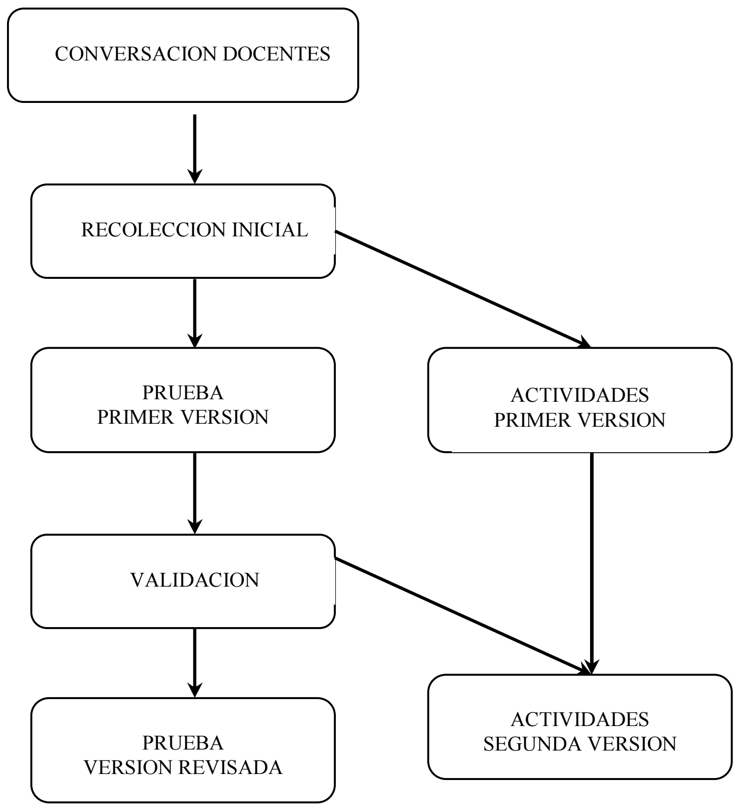


Figura 3.1. Esquema del itinerario para la prueba diagnostica

En la primera versión de la prueba se propusieron reactivos que fueron eliminados luego de la valoración por parte de los profesores, así como también fueron introducidos nuevos ejercicios propuestos por los evaluadores. Las actividades de refuerzo asimismo fueron ajustadas acorde con las sugerencias propuestas por los docentes.

La prueba diagnóstica se conformó por reactivos relacionados con funciones, su representación algebraica y comprensión grafica, desigualdades y valor absoluto. Se desarrollo mediante la modalidad de pregunta de selección múltiple con única respuesta. Los estudiantes debían desarrollar los ejercicios en una hoja aparte y anexarla a la hoja de respuestas.

A finales de julio de 2013, luego de tener la prueba diagnostica preparada, se aplico a los estudiantes de los dos grupos: A y B, en sus respectivas horas de clase. Tomando como base los resultados de esta prueba se procedió a delimitar las actividades de nivelación y refuerzo que se realizarían con los dos grupos.

Se desarrollaron ejercicios en clase, tanto para el grupo A como para el grupo B, de los temas: Algebra (operaciones con términos semejantes, factorización), Funciones (definición, representación grafica), Valor absoluto y Desigualdades. Los temas propuestos no se desarrollaron en un orden específico sino que se buscaban ejercicios en donde se debieran utilizar varios temas; por ejemplo, en un ejercicio de desigualdades después de realizar su análisis se puede factorizar para lograr su desarrollo. Aunque no estaba planeado dentro de la temática se recordó: las propiedades de los números reales, división de polinomios entre otros. Es de anotar que para esta fase del trabajo no se adopto ningún libro de matemáticas de manera específica, sino que se trato de compilar ejercicios de varios textos de cálculo como Stewart, Zill, Thomas que eran llevados a la clase por los estudiantes.

En general, el contenido de la asignatura para el grupo B se impartió de la manera tradicional. Para el grupo A se desarrollo mediante la metodología ACE, que es la propuesta por la teoría APOE.

El plan de trabajo que se desarrollo para el grupo A fue:

1. Plantación temática por semanas.
   Se estableció un cronograma de actividades.

2. Organización de los estudiantes en grupos.
   Al inicio se pensó en realizar grupos de tres personas, pero se organizaron los estudiantes en grupos de cuatro personas, con el fin de trabajar en dos parejas en la sala de sistemas con la finalidad de poder discutir entre ellos frente al computador, hecho que seria un poco dispendioso se realizaran grupos de tres.

3. Desarrollo de actividades en el computador.

   Al introducir el computador como herramienta de la clase lo que se pretende, al desarrollar las actividades, es que el estudiante construya su propio conocimiento en lugar de ser meramente un receptor de información. Que se cuestione y entienda el porqué de la respuesta que presenta el computador.

4. Desarrollo de discusiones en clase.

   En un primer momento de la clase se desarrolla una presentación magistral del tema, que los alumnos deben haber leído antes de la clase, y luego se plantean actividades que se llevan a cabo mediante la realización de preguntas orientadoras que el docente presenta a los estudiantes.

5. Desarrollo de ejercicios extra clase en forma grupal.

   Los ejercicios propuestos se realizaron fuera de horas de clase y su socialización se daba por un estudiante de cada grupo, seleccionado al azar, en el tablero frente a los otros grupos, quienes podían realizar aportes o correcciones en los momentos pertinentes.

6. Desarrollo del primer parcial de manera grupal.

   El primer examen parcial, fue una prueba escrita para los dos grupos A y B; desarrollada por parejas, con el ánimo de tener igualdad de condiciones para los dos grupos.

7. Desarrollo del segundo parcial de manera individual.

   Se presento a los estudiantes de los dos grupos una prueba escrita, la cual fue desarrollada de manera individual.

8. Desarrollo del examen final de manera individual.

Como se comento anteriormente, los estudiantes en el semestre anterior habían cursado y aprobado la asignatura de precálculo, en la cual se estudian temas como: recta real, plano cartesiano, la noción de conjunto, intervalos, valor absoluto, distancia entre puntos, el concepto de función (que es fundamental para el de concepto de límite) y sus formas de representación así como dominio e imagen entre otros.

Terminado el desarrollo de las actividades de nivelación y refuerzo, se le solicito al personal encargado de la sala de sistemas que instalara el programa Winplot en los equipos, con el propósito de realizar su presentación a los estudiantes. Al tiempo se envió por correo electrónico un manual básico del programa para que los estudiantes lo leyeran y se fueran familiarizando con el entorno grafico y las principales herramientas. Adicionalmente se solicito que en la sala se cortara el servicio de Internet en el horario planeado para la clase, con el fin de evitar posible distracciones en los estudiantes.

En la Fundación Universitaria San Martín los estudiantes tienen una intensidad de seis horas de cálculo diferencial a la semana, distribuidos en bloques de dos horas los días lunes, miércoles y viernes para la jornada diurna y martes jueves y sábados para la jornada nocturna. Tomando como base lo anterior, la plantación de las clases se dio de la siguiente manera: el día lunes se realizaba la presentación del tema, el día miércoles se llevaban a cabo las actividades en el computador y el viernes se hacían ejercicios en clase, al final de la semana se asignaban las tareas de refuerzo de lo visto en la semana, que son ejercicios que se proponen tradicionalmente y se extraen de un libro de texto.

En lo sucesivo se presenta un relato centrado, esencialmente, en el trabajo desarrollado en la sala de sistemas que es lo más interesa mostrar en este parte del documento. El diseño del curso tiene en cuenta la descomposición genética del concepto de límite que se describió anteriormente.

En la primera sesión en el aula de sistemas, asistieron la totalidad de estudiantes que tenían a su disposición un computador por cada dos personas, en la cual se tenía instalado el programa. El profesor encargado de la materia fue la persona que coordino ésta y todas las clases. Se realizo la presentación del programa Winplot, que es un software de libre distribución y que presenta un manejo relativamente sencillo. Los estudiantes fueron capacitados en el manejo de las herramientas tales como: escribir expresiones algebraicas, dibujar gráficas en dos dimensiones, ubicar rectas y puntos en el plano cartesiano, ver tablas de coordenadas, entre los más relevantes. Posteriormente se dejó que los estudiantes interactuaran libremente con las principales herramientas del software. Este software fue selecciono por tener un manejo intuitivo y no requerir conocimientos de programación y prestar un buen servicio en pro de los contenidos matemáticos que se propusieron.

Al finalizar la semana, una de las tareas pendientes para la clase siguiente fue la de realizar la lectura: Zenón contra Cauchy escrita por Joaquín Navarro (1979), que el profesor compartió en fotocopia a cada uno de los grupos.

En la segunda sesión, y habiendo discutido en el salón de clase sobre sucesiones, se propuso, entre otras, analizar la expresión $a_n = \frac{2n+1}{n}$, realizar una tabla en la hoja de cálculo asignándole valores a *n* y esquematizar su gráfica. Esto se realizo con la orientación del profesor mediante preguntas, tales como: ¿Qué valores puede tomar *n*?, ¿Qué valores no puede tomar *n* y por qué?, ¿qué valor toma a_n cuando a *n* se le asigna un valor muy grande?

Luego, se pidió a los estudiantes que analizaran el comportamiento de la misma sucesión para cuando *n* toma valores cercanos a cero. Después de unos minutos de debate entre los integrantes de cada grupo, llegaron a la conclusión que no se puede hacer debido a que *n* solo puede tomar valores en el conjunto de los números naturales. Lo cual dio lugar a la deducción de la función: $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ y con la ayuda de la hoja de cálculo se pudo dar respuesta de la ocurrencia de *x* cundo se le asignan valores cercanos a cero. En medio del abordaje del ejercicio se fueron introduciendo los términos "*x tiende a...* ", "*la función se acerca a...*", con el fin de que los estudiantes se fueran familiarizando con la terminología del límite.

En otra sesión se presento, entre otros, un ejercicio con la función $f(x) = \frac{2x^2-8}{x-2}$, se analizo su dominio y con la ayuda de la hoja de cálculo se encontraron los valores cuando *x* se acerca a *2.*

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	1,1	1,5	1,9	1,99	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3	4	5
f(x)	-6	-4	-2	0	2	4	6	6,2	7	7,8	7,98		8,002	8,02	8,2	9	10	12	14

Luego con la ayuda de winplot se realizo la gráfica de dicha función. (El punto identifica la en donde no esta definida la función)

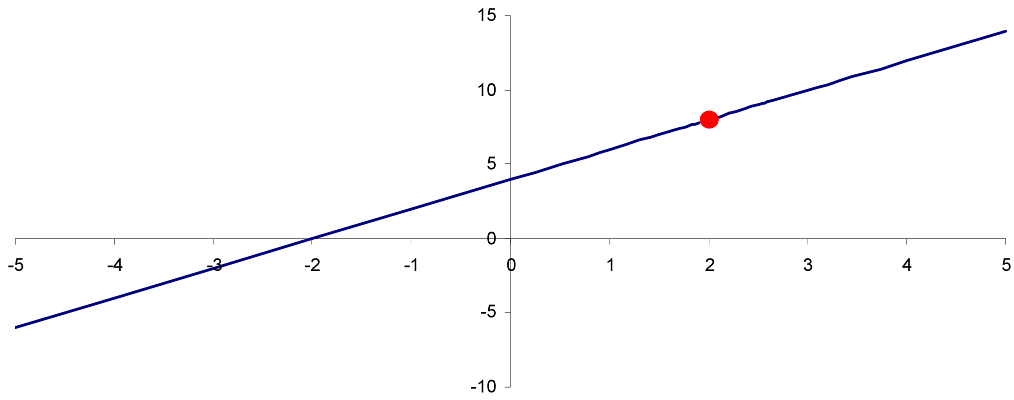


Figura 3.2. Gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$

Se les dio un tiempo prudencial a los estudiantes para que realizaran el análisis de dicha gráfica, discutieran con sus compañeros y consultaran en sus textos. Se les pidió a los estudiantes que anotaran las preguntas que les surgían y trataran de responderlas con los compañeros de grupo, las que no lograran responder se llevarían a la clase para su discusión.

Esta actividad fue desarrollada en concordancia con lo que plantea la teoría APOE sobre las estructuras mentales, en particular con la ACCION. Se le presenta al estudiante el ejercicio $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$, y como estímulo externo se le pide evaluar la función cuando $\boldsymbol{x}$ toma valores cercanos a 2.

En la siguiente sesión, en el salón de clase, entre otras actividades se dio respuesta a las preguntas que habían consignado los estudiantes en sus apuntes. De esto surgieron interrogantes como: (se transcriben tal y como fueron leídos por los estudiantes:

- ¿Qué valores puede tomar *x*, cuando se acerca a 2?
- ¿Qué tanto se puede acercar el valor que le damos a *x* al 2?
- ¿Por qué si 2 no está en el dominio, es el que pone problema?

Estos interrogantes fueron solucionadas por los compañeros de clase con la orientación del docente obteniendo una puesta en común para la respuesta.

En las siguientes dos sesión, en el aula de sistemas, se destinaron a la resolución de límites, para ello se propusieron varios ejercicios similares. La clase contó con varios momentos. A manera de ejemplo se exponen los momentos que se dieron para la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Primer momento.

Se propuso analizar el Dominio, Recorrido.

Segundo momento.

Se elaboró la tabla de valores de la función, con la ayuda de la hoja de calculo, poniendo especial atención a los valores cercanos a $x=1$. Se realizó discusión sobre los resultados.

Aquí los estudiantes fueron quienes propusieron la realización de la tabla como mecanismo para corroborar los resultados de los cálculos mentales que estaban realizando, no medio ningún estímulo o sugerencia del docente para realizar esta actividad. Algunos estudiantes se anticiparon a dar una respuesta, la cual fue corroborada con la ayuda de la tabla de valores. Esta actitud deja ver que el estudiante estaba en la estructura mental de PROCESO.

Tercer momento.

Con la ayuda de WINPLOT se realizó la gráfica de la función, se buscó una vecindad alrededor de $y=2$, se dibujó de manera conveniente o adecuada dos líneas rectas horizontales que estuvieran contenidas en la vecindad alrededor de $y=2$, una recta debía estar por encima de 2 y la otra por debajo de 2, en la intercepción de estas rectas con la gráfica se trazaron dos rectas verticales que cortaran el eje de las equis.

El estudiante contó con la posibilidad de probar varias relaciones entre las franjas con la opción *Parametros A-W…* presente en el menú *Anim* de Winplot. Fue aquí en donde el estudiante pudo visualizar la relación existente entre Epsilon y Delta que es la base de la abstracción para la interiorización del concepto.

Con esta actividad la estructura mental presente en el estudiante es la de OBJETO pues logra relacionar todas las operaciones matemáticas que se realizar para resolver un límite sin tener que efectuarlas de manera sistemática. Esto se logro evidenciar mediante las acciones presentes en los estudiantes en el desarrollo de la clase.

Terminada la clase, el estudiante preparo un informe con los resultados, comentarios y conclusiones de la actividad desarrollada en el computador.

Cuarto momento.

El docente, por medio de preguntas guiadas, motivo al estudiante para que la definición del concepto de límite se fuera construyendo de manera natural teniendo como base las experiencias vividas en el aula de sistemas. Finalmente, se presento la definición formal de límite dada por Karl Weierstrass.

Quinto momento.

En el salón de clase, se realizo la discusión pertinente referida a la experiencia de los estudiantes en el aula de sistemas y la definición formal de límite. Posteriormente se inicio la explicación del tratamiento algebraico y el desarrollo operativo para la obtención del límite de una función.

Con el ejercicio de reemplazar la x por valores cercanos a un número determinado se espera que los estudiantes interioricen la noción de *acercarse a* o *tender a* y pueden predecir el valor del límite de la función.

Cuando se trabaja con el WINPLOT, el estudiante tiene la posibilidad de ver el límite de una función en un punto dado de manera dinámica e ir trabajando la noción de límite lateral por la izquierda y por la derecha.

Cuando se realiza la representación gráfica de la función y se busca la vecindad alrededor de 2 se estaba eligiendo un ε > 0, el trazar las rectas horizontales corresponde a: $y = 2 + \varepsilon$ y $y = 2 - \varepsilon$, para algún *a* del dominio de la función. Para las rectas verticales se esta tomando un $\delta > 0$ para formar la vecindad alrededor de 1 generando el intervalo $(\ 1-\delta\ ,\ 1+\delta\ )$, de tal modo que cualquier elemento que pertenezca a este intervalo tenga su imagen en el intervalo $(\ 2-\varepsilon\ ,\ 2+\varepsilon\ )$. Mostrando con esto la relación $\varepsilon - \delta$.

A continuación se presenta la gráfica de la función, con las construcciones que se realizaron dentro del desarrollo de la clase con el programa WINPLOT.

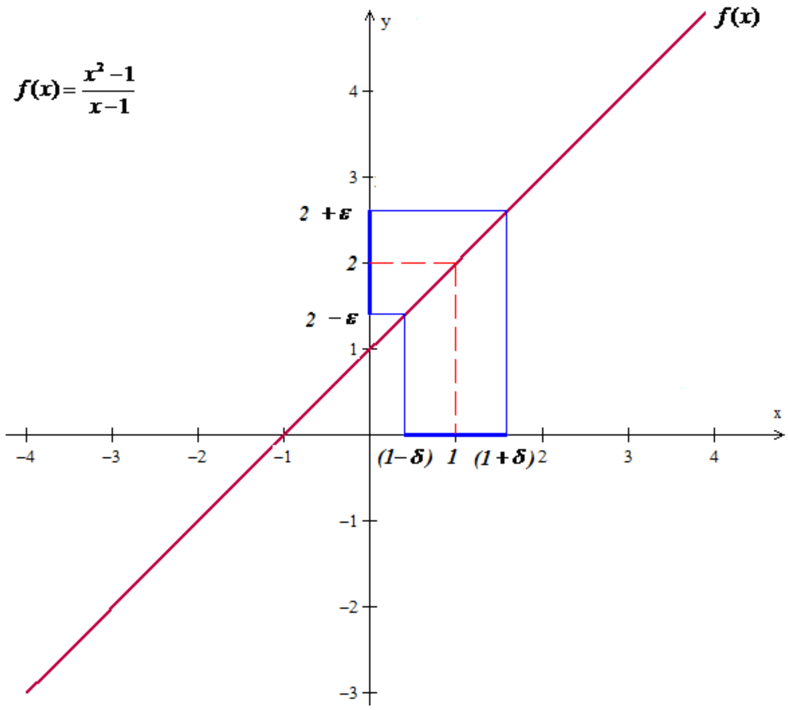


Figura 3.3. Gráfica de la función realizada en Winplot

Terminadas las actividades en el computador, se les entrego a los estudiantes una guía de trabajo (ANEXO 2) que debían resolver en grupo y entregar por parejas, en las primeras actividades se debe completar la tabla de valores de una función y el estudiante puede predecir el valor del límite para posteriormente realizar la gráfica y contrastar los resultados de su análisis con el dibujo.

En la actividad 2, se presenta un problema en el cual los estudiantes se enfrentan a dos situaciones, una gráfica y la otra algebraica. La actividad 3 se plantea un ejercicio que tiene como fin la abstracción que el estudiante logre hacer de la información y con esta pueda llegar a conclusiones.

Para la última actividad, se muestra una serie de preguntas guía para que el estudiante concluya de situaciones particulares a la generalidad.

Con frecuencia las situaciones presentadas a los estudiantes para la representación del concepto de límite tienden a favorecer la integración de habilidades de índole: verbal, numérico, de análisis e interpretación, con el propósito de saltar de un sistema a otro sin que se den traumatismos en el alumno.

Dentro del desarrollo de los ejercicios que se propusieron, el docente se encargaba de resolver uno a manera de ejemplo, otro debían ser desarrollado en grupo pero guiados por el profesor, es decir, se plantea el ejercicio y por medio de preguntas que realiza el docente al grupo se dan putas para que los estudiantes vayan construyendo el desarrollo del ejercicio, los demás, de no presentarse alguna pregunta, eran hechos por los estudiantes siempre bajo la observación del docente. Es de anotar que en todas y cada una de las clases en las que se trabajo en grupo se valoro la participación de los estudiantes.

3.2 ESQUEMA DE APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE

3.2.1 Acción

El estudiante posee una estructura mental ACCION, referente al concepto de límite de funciones, cuando asigna valores a la variable de la función por sugerencia del docente o un par. Es una rutina estática en la que el estudiante actúa de manera mecánica. Si se le pregunta por el resultado de un valor especifico, el estudiante, debe realizar todos los cálculos de manera manual para dar la respuesta.

3.2.2 Proceso

Cuando el estudiante posee una estructura mental PROCESO, imagina la rutina de evaluar la función en varios guarismos y es capaz de predecir el valor del límite e interpretar el comportamiento de la función en esos puntos. Es capaz de narrar los procedimientos que se deben realizar para calcular el límite. Es consiente de los pasos que se llevan a cabo en el calculo de un limite.

3.2.3 Objeto

Si el estudiante posee una estructura mental OBJETO, identifica el dominio de la función para determinar los números en los que no esta definida. Responde preguntas sobre el límite de la función sin haberlo calculado matemáticamente. Utiliza las propiedades de los límites para resolverlo de manera más eficiente. Hace una representación mental de la grafica de la función. Si existen diferentes formas de calcular el límite es capaz de encontrarlas y argumentar con cual de ellas resolver el límite.

3.2.4 Esquema

Es el resultado de la organización de las acciones, objetos y procesos así como también de otros esquemas previamente construidos para formar un nuevo esquema que representa el concepto de límite. Cuando el estudiante tiene interiorizado en un esquema el concepto de límite entiende todo su significado y es capaz de solucionar ejercicios en los que se necesite o este presente este concepto.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

4.1 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Con el fin de dar respuesta a la hipótesis de la investigación se llevaron a cabo: censos, entrevistas no estructuradas y pruebas escritas para obtener datos y poder analizarlos estadísticamente.

Para la recolección de datos se usaron como instrumentos las pruebas de entrada y salida, es decir, antes y después de haber aplicado la propuesta a los estudiantes.

4.1.1 Análisis de reactivos de la prueba de entrada

La prueba de entrada consto de 16 preguntas que estaban relacionadas con los temas de: definición de función, grafica de una función, dominio y rango de funciones; temas de algebra como: factorización, racionalización, desigualdades y valor absoluto; dado que todos estos temas son fundamentales para enfrentar el concepto de limite de funciones. Se anexa la prueba de entrada (ANEXO 1)

Los índices de dificultad P_j y homogeneidad r_{jx}, que se obtuvieron para esta prueba fueron los siguientes:

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I. Dificultad	0,7	0,9	0,3	0,3	0,7	0,4	0,4	0,7	0,6	0,3	0,5	0,3	0,5	0,6	0,3	0,6
Valoración	F	MF	D	D	F	D	D	F	F	D	N	D	N	F	D	F

Tabla 4.1. Índices de dificultad para los ítems para la prueba de entrada.

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I. Homogeneidad	0,3	0,4	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	0,5	0,1	0,3	0,4	0,5	0,5	0,3	-0,1	0,5
Valoración	BM	C	RR	PD	RR	C	PD	C	PD	BM	C	C	C	BM	P	C

Tabla 4.2. Índices de homogeneidad para los ítems para la prueba de entrada.

De la tabla anterior podemos destacar que la pregunta 15 que hace referencia al tema desigualdades, debe ser cambiada, por presentar un índice de dificultad de 0.3 y estar valorada como difícil con un índice de homogeneidad de -0.1 valorada como pésima. Adicionalmente se puede apreciar que en la prueba hay una pregunta valorada como muy fácil (MF), seis como fáciles (F), dos normales (N) y siete valoradas como difíciles (D).

Por otra parte se deben revisar los ítems 3,4,5 y 9 que hacen referencia al tema de funciones por no presentar una valoración optima en el índice de homogeneidad.

4.1.2 Análisis de opciones de respuesta de la prueba de entrada

Se presenta la tabla de resumen con las respuestas marcadas por los estudiantes durante la presentación de la prueba de entrada. A manera de ejemplo, la respuesta correcta para el primer ítem es la ***B***, la cual fue escogida por 26 estudiantes, 3 escogieron la ***A***, 3 la ***C,*** 3 la ***D***, no hay valor en la casilla blanco lo que significa que la totalidad de estudiantes respondieron al primer ítem. Total Gestionadas hace referencia a la cantidad de estudiantes que contestaron al ítem.

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
CORRECTA	B	B	A	A	C	C	A	A	C	C	C	B	C	A	A	C
A	3	1	10	10	4	9	12	22	4	5	4	15	8	20	10	1
B	26	30	14	10	2	8	3	7	5	15	7	10	4	7	3	6
C	3	2	7	9	25	14	11	2	20	9	17	5	16	5	20	20
D	3	2	4	5	3	2	8	1	5	5	6	3	7	2	1	5
En blanco	0	0	0	1	1	2	1	3	1	1	1	2	0	1	1	3
Total Gestionadas	35	35	35	34	34	33	34	32	34	34	34	33	35	34	34	32
Total Acertadas	26	30	10	10	25	14	12	22	20	9	17	10	16	20	10	20
Total	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

Tabla 4.3. De opciones de respuesta para los ítems de la prueba de entrada.

4.1.3 Análisis de reactivos de la prueba de salida.

La prueba de entrada consto de 14 preguntas de las cuales las primera cuatro hacían referencia a temas relacionados con asíntotas y gráfica de funciones, por tal motivo no se tuvieron en cuenta para este análisis pues lo preponderante en este estudio es la apropiación del concepto de limite. Se anexa la prueba de salida (ANEXO 3)

Los índices de dificultad P_j y homogeneidad r_{jx}, que se obtuvieron fueron:

Item n°	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
I. Dificultad	0,7	0,5	0,6	0,5	0,7	0,5	0,3	0,4	0,3	0,7
Valoración	F	N	F	N	F	N	D	D	D	F

Tabla 4.4 Índices de dificultad los ítems para la prueba de salida

Item n°	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
I. Homogeneidad	0,3	0,6	0,4	0,6	0,5	0,6	0,5	0,2	0,5	0,8
Valoración	RR	C	C	C	C	C	C	RR	C	C

Tabla 4.5 Índices de homogeneidad los ítems para la prueba de salida.

Según la tabla 4.5 las preguntas presenta un índice de dificultad fácil (F), normal (N) y difícil (D) por lo que no amerita que alguna se cambie. Sin embargo, según el resultado del índice de homogeneidad la preguntas 5 y 12 deben ser revisadas por presentar guarismos de 0.3 y 0.2 respectivamente.

4.1.4 Análisis de opciones de respuesta de la prueba de salida

A continuación se muestra la tabla de resumen con las respuestas marcadas por los estudiantes durante la presentación de la prueba de salida. Por ejemplo, la respuesta correcta para el ítem cinco es ***C***, la cual fue elegida por 13 estudiantes, 3 escogieron la ***D***, 2 la ***B,*** mientras que nadie eligió la respuesta ***A***, no hay valor en la casilla blanco lo que significa que la totalidad de estudiantes respondieron al primer ítem. Total Gestionadas hace referencia a la cantidad de estudiantes que contestaron al ítem.

Item n°	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
CORRECTA	**C**	**D**	**C**	**B**	**B**	**B**	**C**	**D**	**A**	**C**
A	0	2	3	4	4	6	2	4	4	0
B	2	5	2	9	10	8	6	1	10	1
C	13	1	11	3	1	0	5	3	1	11
D	3	7	2	1	0	2	2	7	0	3
En blanco	0	3	0	1	3	2	3	3	3	3
Total	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
Total Gestionadas	18	15	18	17	15	16	15	18	15	15
Total Acertadas	13	7	11	9	10	8	5	7	4	11

Tabla 4.6 De opciones de respuesta para los ítems de la prueba de salida

4.1.5 Prueba de normalidad de los datos

Los datos que arrojaron las pruebas fueron procesados con la ayuda de la hoja de cálculo Excel y el paquete estadístico SPSS con el objetivo de determinar si seguían una distribución normal y poder determinar el camino a seguir en el análisis estadístico de los datos; como se menciono anteriormente la prueba elegida para este caso fue la de Kolmogorov-Smirnov, la cual fue calculada en SPSS.

Para la prueba de normalidad se establecieron las siguientes hipótesis.

Hipótesis nula: Los datos obtenidos en las pruebas siguen una distribución normal.
Hipótesis alterna: Los datos obtenidos no siguen una distribución normal.

En la siguiente tabla se presenta el resultado que se obtuvo al evaluar los datos de la prueba de entrada.

Pruebas de normalidad

		Kolmogorov-Smirnov		
JORNADA		Estadístico	gl	Sig.
PUNTAJE	DIURNA	,253	22	,001
	NOCTURNA	,211	13	,116

Tabla 4.7 Resultados obtenido para la prueba de entrada en SPSS

A continuación se exhibe la tabla con el resultado al evaluar los datos de la prueba de salida en SPSS.

Pruebas de normalidad

		Kolmogorov-Smirnov		
JORNADA		Estadístico	gl	Sig.
PUNTAJE	DIURNA	,176	11	,002
	NOCTURNA	,162	7	,200

Tabla 4.8 Resultados obtenido para la prueba de salida en SPSS

Los resultados derivados de las pruebas de Kolmogorov-Smirnov demostraron que los datos no seguían una distribución normal, ya que la ”*p*” asociada a los contrastes es de 0,001 y 0,002, para las pruebas de entrada y salida en la jornada diurna respectivamente, esta por debajo del nivel de significación del alfa prefijado (0,05). Esto obligó a tomar un camino diferente en el análisis estadístico, optando por pruebas no paramétricas; lo que condujo a trabajar con la U de Mann-Whitney que, como se planteo anteriormente, es una prueba no paramétrica; es decir, para datos que no siguen una distribución normal.

Siguiendo los dictámenes dados por la prueba de Mann- Whitney se establecieron las siguientes hipótesis para la prueba de entrada.

Hipótesis nula: Las personas del grupo de la noche tienen igual mediana que las personas del grupo del día, es decir:

$$H_0: \ Me_1 = Me_2 .$$

Hipótesis alterna: Las personas del grupo de la noche tienen diferente mediana que las personas del grupo del día, es decir:

$$H_1: \ Me_1 \neq Me_2 .$$

Con la ayuda del paquete estadístico SPSS se realizo el contraste, con lo cual se encontraron los siguientes resultados:

Rangos

VALOR		N	Rango promedio	Suma de rangos
PUNTAJE	DIURNA	22	19,77	435,00
	NOCTURNA	13	15,00	195,00
	Total	35		

Tabla 4.9 Resultados obtenido para Rangos de la prueba de entrada en SPSS

Estadísticos de prueba

	PUNTAJE
U de Mann-Whitney	104,000
W de Wilcoxon	195,000
Z	-1,357

Tabla 4.10 Resultados estadísticos de prueba en la prueba de entrada en SPSS

Para una prueba de dos colas, (en donde se comparan dos poblaciones "nuevas"), el valor de Z que da una distribución del 97,5% es 1,96. De ahí que el valor crítico de Z es de ± 1,96. Por lo tanto, si el valor absoluto de Z ($|Z|$) es mayor que 1.96, se rechaza la hipótesis nula. Para el caso que nos ocupa se encontró que Z presenta un valor de *-1,357*

Los resultados que se obtuvieron para la prueba de entrada permitieron convalidar la hipótesis nula en donde se afirma que no hay diferencia estadística entre las medianas de los dos grupos.

De igual modo se procedió para la prueba de salida.

Hipótesis nula: Las personas del grupo de la noche tienen igual mediana que las personas del grupo del día, es decir:

$$H_0 : \ Me_1 = Me_2 .$$

Hipótesis alterna: Las personas del grupo de la noche tienen diferente mediana que las personas del grupo del día, es decir:

$$H_1 : \ Me_1 \neq Me_2 .$$

En seguida se presentan los resultados que mostró el paquete estadístico SPSS para la prueba de salida.

Rangos

VALOR		N	Rango promedio	Suma de rangos
PUNTAJE	1,00	11	11,95	131,50
	2,00	7	5,64	39,50
	Total	18		

Tabla 4.11 Resultados obtenido para Rangos de la prueba de salida en SPSS

Estadísticos de prueba

	PUNTAJE
U de Mann-Whitney	11,500
W de Wilcoxon	39,500
Z	-2,472

Tabla 4.12 Resultados estadísticos de prueba en la prueba de salida en SPSS

Como se menciono antes el valor de *Z* que da una distribución del 97,5% es 1,96. De ahí que el valor crítico de *Z* es de ± 1,96. Por lo tanto, si el valor absoluto de *Z (| Z |)* es mayor que 1.96, se rechaza la hipótesis nula. El valor encontrado para *Z* es de *-2,472.*

Los resultados que se obtuvieron para la prueba de salida no permitieron aceptar la hipótesis nula. Por ende se puede concluir que existe diferencia estadística entre las medianas de los dos grupos.

4.1.6 Alfa de Cronbach

El Alfa de Cronbach mide la estabilidad o consistencia de los resultados obtenidos.
El resultado que se halló al realizar la consulta del Alfa de Cronbach en SPSS fue:

Estadísticas de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,706	2

Tabla 4.13 Resultados estadísticos de fiabilidad en SPSS

Como se comento anteriormente, cuanto más se acerque el índice al extremo 1, mejor es la fiabilidad; se considerando una fiabilidad respetable a partir de 0,70. Este valor de 0.706 esta un poco por encima de dicho valor.

4.1.7 Análisis de Caja

Las figuras a continuación muestran los diagramas de caja de los puntajes de los estudiantes en cada una de las jornadas. En la figura 4.1 se observa que las dos distribuciones no son similares, el grupo de la jornada diurna presenta los puntaje más bajos pero también lo más altos.

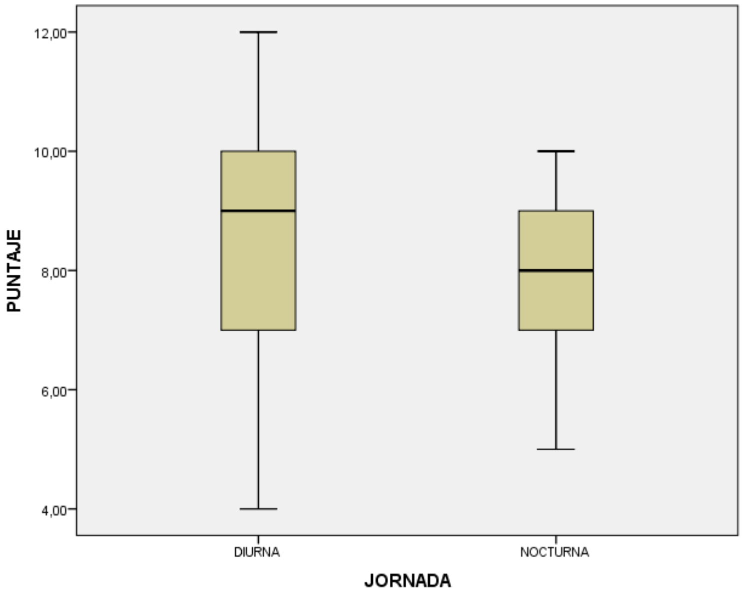


Figura 4.1.4. Diagramas de caja para la prueba de entrada.

En la figura 4.2 se puede observar que las dos distribuciones son totalmente diferentes, el grupo de la jornada diurna presenta puntajes muy por encima del grupo de la noche.

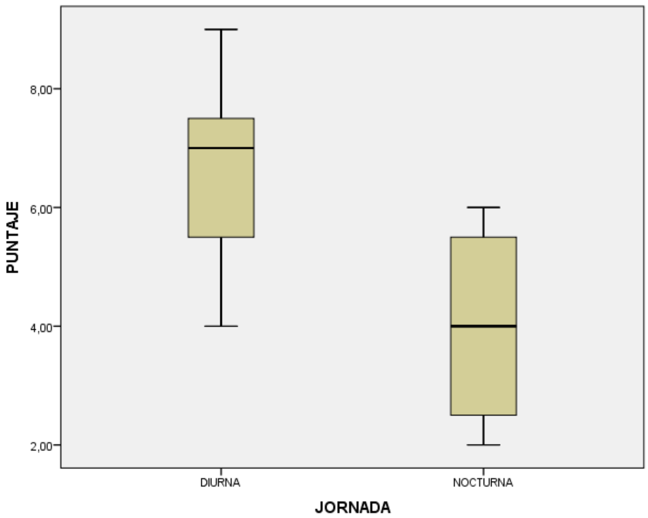


Figura 4.1.5. Diagramas de caja para la prueba de salida.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES Y PROYECCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Se presentan las conclusiones a partir de los resultados de la investigación, adicional a esto se plantean algunas ideas para continuar con este estudio. Por último, se describen algunas consideraciones generales que dieron durante el desarrollo de la investigación.

5.1 CONCLUSIONES

5.1.1 Conclusiones sobre el objetivo general de la investigación.

El Objetivo General que se planteo para este trabajo fuel de establecer la correlación entre el uso de actividades realizadas en el computador con la herramienta WINPLOT, en el aprendizaje del concepto de límite, y el rendimiento académico de los estudiantes de segundo semestre de ingeniería de la Universidad San Martín.

Con el desarrollo de esta investigación se alcanzo el objetivo general, pues se logro establecer la correlación entre el uso de actividades realizadas en el computador y el rendimiento académico de los estudiantes en el tema de límites de funciones, como se vera mas adelante.

5.1.2 Conclusiones sobre los objetivos específicos de la investigación.

- *Organizar una prueba de entrada, como herramienta que permita detectar los temas en que los estudiantes necesitan refuerzo.*

  Se organizó una prueba de entrada como herramienta que permita detectar los temas en que los estudiantes necesitan refuerzo en una versión preliminar.

- *Valoración y validación por parte de docentes de diferentes universidades una prueba de entrada con el fin de hacerla lo más especifica posible.*

Se realizó la valoración y validación de la prueba de entrada, con la participación y la ayuda de docentes de universidades como: Universidad Sergio Arboleda, Fundación universitaria San Martín, Universidad Católica y la ECCI. Realizando los ajustes que fueron sugeridos por los profesores consultados.

- *Diseñar y desarrollar actividades referentes a la temática límite de funciones de una variable usando la herramienta Winplot.*
  Se diseñaron y desarrollaron actividades referentes a la temática límite de funciones para ser implementadas en el aula mediante el uso de la herramienta computacional winplot.

- *Analizar comparativamente los resultados alcanzados por los estudiantes, sujetos del estudio.*
  Se realizo el análisis comparativo de los resultados logrados por los estudiantes que hicieron parte de este estudio.

5.1.3 Conclusiones sobre la hipótesis de la investigación.

La hipótesis que se planteo al inicio de la investigación fue: Con el desarrollo de actividades mediante el uso de la herramienta WINPLOT, tendientes a la construcción, comprensión y apropiación del concepto del límite, los estudiantes mejoraran sus resultados académicos en la materia de Calculo Diferencial.

Se da una respuesta afirmativa a la hipótesis que se planteo al inicio de este estudio, comprobando que al implementar actividades para ser desarrolladas mediante el uso de la herramienta WINPLOT para el desarrollo de temáticas como la de límite de funciones, los estudiantes pueden elevar su comprensión del concepto formal de límite y mejor sus resultados académicos.

5.2 CONSIDERACIONES GENERALES.

El implantar esta metodología con la utilización del software y la participación activa de los estudiantes dio como resultado el mejoramiento de su desempeño académico.
Al finalizar el curso de cálculo diferencial, los estudiantes que tomaron la clase con la ayuda del computador, mostraron mayor seguridad al momento de realizar los ejercicios propuesto, no solo en el tema de límites sino en el de derivadas.
El uso del software Winplot facilito la interpretación del concepto de límite, ya que se paso de una presentación estática (ecuación tradicional) a una presentación visual dinámica por parte del estudiante.

Cuando finalizo la primera sesión en la que se utilizo el software Winplot, como ayuda para el desarrollo del tema, los estudiantes realizaron comentarios tales como: ¡Esta clase no parece de matemáticas!, ¡es la clase de matemáticas mas corta de mi vida, y fue la mejor!, ¡Hoy no estuve aburrido!, mostrando en las siguientes sesiones tanto en el salón de clase como en el aula de sistemas una actitud de agrado frente a las actividades propuestas.
Los grupos colaborativos se convierten en una buena estrategia en la que los estudiantes que manejan mejor el tema le ayudan a sus compañeros, "jalonándolos" para hacerlos participes en la construcción de su propio conocimiento.
Se noto un cambio positivo de los estudiantes referente a su gusto por las matemáticas.

En la actualidad contamos con una variedad de herramientas tecnológicas que se pueden implementar como una metodología dentro del aula, pues es el entorno tecnológico en donde se están desenvolviendo diariamente lo estudiantes

La motivación del estudiante es un agente fundamental en el proceso educativo, el implementar diferentes técnicas y metodologías que minimicen la monotonía no permitirán que el estudiante caiga en el tedio.

5.3 PROYECCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo esta centrado en la comprensión y apropiación de un concepto: el de límite de funciones, bajo la mirada de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Como proyección se presenta:

1. La implementación de actividades, bajo la misma metodología, tendientes a la comprensión de otros conceptos tales como el de continuidad de funciones y el de derivada.
2. El uso de la teoría APOE en la planeación y ejecución de un curso completo de precalculo o de matemáticas básicas a nivel universitario.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apóstol, T. M. (1991). *Calculus, Cálculo con Funciones de una Variable, con una Introducción al Álgebra Lineal.* (Vol.1). (2ª ed.). Barcelona: Reverté.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, 1-32.

Baker, B., Cooley, L., Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema, *Journal for Research in Mathematics Education*, *31, 5*, 557-578.

Bruner, J. (1972). *El Proceso de educación*. México: Uteha.

Cottrill, J., Dubinsky, ED., Nichlos, D., Schwingendorf, K. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme, *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167-192.

Dubinsky, E., Tall, D. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. Ed.). *Advanced in Mathematical Thinking* (pp.25–41). Boston: Kluwer Academic publishers.

Dubinsky, E. (1991). Schwingendorf, K. "Constructing Calculus Concepts: Cooperation in a Computer Laboratory", en Carl Leinbach (ed.) The Laboratory Approach to Teaching Calculus,.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetiana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática*, *8, 3,* 24-41

García, L, (2012). *Construcción de un test para medir los conocimientos y Aptitudes en matemáticas de estudiantes de primer año de Universidad.* (Tesis de maestría). Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Col.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, (2006). *Metodología de la Investigación*. (4ª ed.). Mexico: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1998). El Cálculo. (7ª ed.). México: Editorial Harla

Martinez, P & Logreira, C. (2000). Efectos del Software Educativo Tutorial en el Aprendizaje de los Estudiantes, facultad de Ingeniería de la Universidad.
Recuperado de http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie2000/papers/155/index.html

Navarro, J. (1979). Zenón contra Cauchy. En: Universitas, tomo 12 (La Matemática), Barcelona: Salvat Editores.

Purcell, E. J., Varberg, D., y Rigdon, S. E. (2001). Cálculo. 8ª ed.. México. Editorial Prentice Hall.

Riquelme, L. Uso de la herramienta Excel como recurso de enseñanza y su contribución al rendimiento en Matemática en alumnos adultos en programa de regularización de estudios. (Tesis de maestría). Recuperado de,
http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2004/riquelme_l/sources/riquelme_l.pdf

Ruiz, C. Instrumentos de Investigación Educativa: procedimientos para su diseño y validación. 2 ed. Barquisemeto, Venezuela: Ediciones CIDEG, C.A. p. 102-107 : Recuperado de http://www.carlosruizbolivar.com/articulos/archivos/Curso%20CII%20%20UCLA%20Art.%20 Confiabilidad.pdf. 226 p.

Spivak, M. Cálculo Infinitesimal. (1996). (2ª ed.). Barcelona: Reverte.

Stewart, J. (1998). *Cálculo de una Variable, Transcendentes Tempranas*. (3ª ed.).
México: Thomson.

Thomas, G. B. y Finney, R. L. (1996). *Calculus and Analytic Geometry*. (9ª ed.). United States of American: Eddison- Wesley Piblishing Company

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*, 5-31.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education, en Nesher, P. y Kilpatrick, J.

ANEXO 1. PRUEBA DE ENTRADA

Nombre: ____ **Código:**________________.

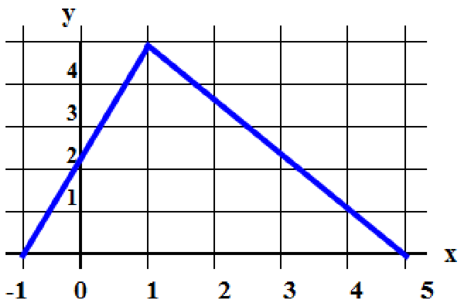
1. Si la gráfica de ***f*** es la de la derecha entonces ***f (4)*** =

   a) 0

   b) 1

   c) 2

   d) 3



2. Si la gráfica de *f* es la del punto anterior entonces ***f*** **(*x*)** = 0 se satisface para ***x*** =

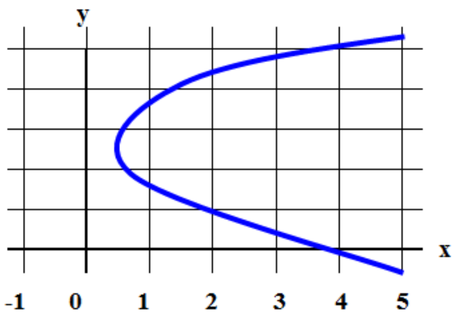
   a) 0 y 3 b) -1 y 5 c) 2 y 4 d) 2

3. Indique en cuál de las siguientes ***y*** es una función de ***x***.

   a)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	1	0

   b) $x = |y|$ c)



   d) a) y b)

4. El dominio para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$, es:

   a) $x \neq -4$ y $x \neq 4$ b) $x \neq -4$ c) $x \neq 4$ d) $x = -4$

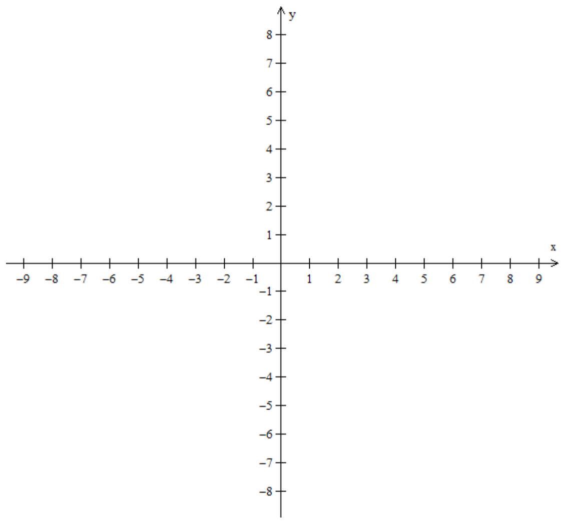
5. Si $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$, entonces $g(-3) =$

   a) -10 b) 0 c) 10 d) 27

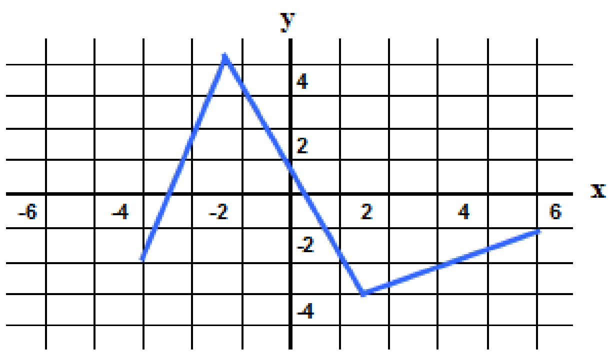
6. El rango de $f(x) = 3x^2 + 1$ es:

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $[1, \infty)$ d) $(1, \infty]$

7. Realice un bosquejo de la función $f(x) = x^2 - 1$, e indique cual es su dominio y rango



8. Si la gráfica de *f* es la de la derecha entonces su dominio es:



a) [-4, 5]

b) (-4, 5)

c) [-3, 4]

d) $\mathbb{R}$

9. Si la gráfica de *f* es la anterior entonces su imagen es:

a) [-3, 4]

b) (4, -3)

c) [0 , 4]

d) $\mathbb{R}$

10. Si se simplifica la expresión $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ una expresión equivalente es:

a) $\dfrac{x-1}{x+3}$ b) $\dfrac{x-2}{5x+6}$ c) $\dfrac{2x^2-2}{6x^2+6}$ d) $\dfrac{-1}{5+3}$

11. Si se racionaliza la expresión $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ el resultado es

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ c) $-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ d) 2

12. Si se simplifica la expresión $\dfrac{(2+h)^{-1}-2^{-1}}{h}$ el resultado es

a) -1 b) $-\dfrac{1}{2(2+h)}$ c) $\dfrac{1}{2(2+h)}$ d) $\dfrac{1}{2h}$

13. Si se racionaliza la expresión $\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$ el resultado es

a) 0 b) -1 c) $\dfrac{-1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}$ d) 1

14. Al resolver la desigualdad $4x+8\le -3x-5$ la solución es:

a) $x=-13/7$ b) $\left]-\infty,-13/7\right]$ c) $\left[13/7,\infty\right]$ d) $x\neq -13/7$

15. Al resolver la desigualdad $2(x+1)-3(x-2)<x+6$ la solución es:

a) $x=-1/3$ b) $\left[-1,\infty\right[$ c) $\left[1,\infty\right[$ d) $\left[-1,\infty\right]$

16. Al resolver la desigualdad $|x-3|<2$ la solución es:

a) $x\in(1\ ,\ 5)$ b) $x=2/3$ c) $x<1$ d) $x\neq 1$

ANEXO 2. GUIA DE TRABAJO

(LO QUE ESTA EN CURSIVA NO FUE PRESENTADO AL ESTUDIANTE, SE INTRODUCE PARA VISULIZAR LA DESCOMPOSICION GENETICA DEL CONCEPTO DE LIMITE)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$, determine su dominio y analice el comportamiento de la función para valores de x. Represente gráficamente la función. Apóyese en winplot.

Dominio ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999
f(x)					

x	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
f(x)					

1. *La acción de evaluar la función f(x) en unos pocos puntos cercanos a a, cada punto sucesivo más cerca de a que el anterior, muy próximo a a, o incluso igual a a.*

2. *Interiorización de la acción del paso anterior en un único proceso en el que f(x) se aproxima a L como se x se aproxima a a. Es decir, analizar el proceso "x se acerca a a" para alcanzar el proceso "f(x) se acerca a L"*

3. *Encapsular el proceso del paso 2, de modo que, por ejemplo, al hablar acerca de las propiedades de combinación de límite, el proceso de límite se convierte en un objeto al que se le puede aplicar las acciones.*

Considere el intervalo $\left(5 - \dfrac{1}{2}, 5 + \dfrac{1}{2}\right)$ alrededor de ***y* =5**. Encuentre un intervalo abierto sobre el eje ***x*** alrededor de ***x* =2** que verifique que para cualquier ***x*** de ese intervalo, salvo quizás para 2, sus imágenes se encuentran en el intervalo dado. Interprete gráficamente. Apóyese en winplot.

¿Podría repetir el procedimiento con cualquier intervalo?

4. *Reconstruir el proceso del paso 2 en términos de intervalos y desigualdades. Esto se hace mediante la introducción de estimaciones numéricas de aproximaciones, en símbolos matemáticos correspondería a* $0 < |x - a| < \delta$ *y* $|f(x) - L| < \varepsilon$

x<2			
x	***f(x)***	***|x-2|***	***|f(x)-5|***
1,9			
1,99			
1,999			
1,9999			

x>2			
x	***f(x)***	***|x-2|***	***|f(x)-5|***
2,1			
2,01			
2,001			
2,0001			

5. *Aplicar un esquema de cuantificación para conectar el proceso de reconstrucción de los pasos anteriores con el fin de conseguir la definición formal del límite. La aplicación de esta definición es un proceso en el que uno se imagina la iteración a través de todos los números positivos y, cada uno lo llama* ε.
6. *Se hace una concepción completa de* $\varepsilon - \delta$ *a situaciones específicas.*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$0 < |x - a| < \delta \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 2| < \delta \qquad |f(x) - 5| < \varepsilon$$

ANEXO 3. PRUEBA DE SALIDA

Nombre: ____ **Código:**______________.

a. Determine a y b de modo que f sea continua en todas partes

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x\le 0 \\ ax+b & si \quad 0<x<1 \\ 1 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

b. Dada la función f(x) y utilizando la teoría de límites solucione los puntos 1 al 4

$$f(x) = -\frac{1}{x^2-4}+3$$

1. El dominio de la función está dado por.
   a) Todos los números reales.
   b) Todos los números reales diferentes de 4.
   c) Todos los números reales diferentes de 4 y -4
   d) Todos los números reales diferentes de 2 y -2

2. En qué puntos existen discontinuidades.
   a) En x=0.
   b) En x=2 y x=-2.
   c) La función es continua en todos los reales.
   d) En x=4 y x=-4.

3. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de la función.
   a) Asíntota vertical en x=0 y x= 2; Asíntota horizontal en f(x)=-1.
   b) Asíntota vertical en x=2 y x=- 2; Asíntota horizontal en f(x)=3.
   c) Asíntota vertical en x=0 y x=2; No tiene asíntotas horizontales.
   d) Asíntota vertical en x=4 y x=-4; Asíntota horizontal en f(x)=0.

La solución de los siguientes límites es:

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-4}$ a) ∞ b) 0 c) 1 d) ∞/∞

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ a) ½ b) 1 c) 5/4 d) 2/3

6. $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$ a) -½ b) 0 c) 1/2 d) 2

7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$ a) -1 b) -1/2 c) 1/2 d) 3

8. $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{4t^2-5t+1}-8}{3t+2}$ a) 0 b) 2/3 c) 4 d) 4∞

9. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ a) 0 b) 1/4 c) 2/3 d) 1

10. $\lim_{x\to 3}\dfrac{3^{x+2}+2^2}{3^{x-2}}$ a) 0 b) 1/4 c) 2/3 d) 1

11. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}$ a) 0 b) 1 c) ∞/∞ d) ∞

Dada la función resuelva el punto 12 y 13.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & si \;\; x\leq -1 \\ x, & si \;\; -1<x\leq 1 \\ 1, & si \;\; x>1 \end{cases}$$

12. $\lim_{x\to -1} f(x)$ No existe b) 3 c) -1 d) 3

13. $\lim_{x\to 1} f(x)$ No existe b) 3 c) -1 d) 3