

INFLUENCIAS INDIRECTAS EN REDES  
PROCESOS-MATERIALES

ANGELICA ROCIO VARGAS GARAY

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA  
ESCUELA DE POSTGRADOS  
MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA  
MAYO DE 2014

INFLUENCIAS INDIRECTAS EN REDES  
PROCESOS-MATERIALES

ANGELICA ROCIO VARGAS GARAY

Presentado como requisito parcial para optar al título de  
Magíster en Docencia e Investigación Universitaria

Director:  
RAFAEL DÍAZ

Codirector:  
LUIS EDUARDO PEREZ

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA  
ESCUELA DE POSTGRADOS  
MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA  
MAYO DE 2014

Nota de aceptación

---

---

---

---

Director

---

Codirector

---

Jurado

---

Jurado

BOGOTÁ D. C., MAYO DE 2014

---

# CONTENIDO

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Descripción del Problema</b>	<b>1</b>
1.1. Formulación del Problema . . . . .	1
1.1.1. Pregunta de Investigación . . . . .	2
1.1.2. Hipótesis . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. General . . . . .	3
1.3.2. Específicos . . . . .	4
1.4. Metodología de Investigación . . . . .	4
1.4.1. Revisión Bibliográfica . . . . .	5
1.4.2. Aplicación de los algoritmos de influencias indirectas . . . . .	5
1.4.3. Análisis de Resultados e Informe Final . . . . .	6
1.5. Estado del Arte . . . . .	6
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>9</b>

2.1. Referente Matemático . . . . .	9
2.1.1. Grafos . . . . .	9
2.1.2. Grafo Dirigido . . . . .	10
2.1.3. Camino Dirigido . . . . .	11
2.1.4. Grafo Ponderado . . . . .	12
2.1.5. Grafo Coloreado . . . . .	13
2.1.6. Grafo Dirigido y Coloreado . . . . .	13
2.1.7. Grado de un Vértice . . . . .	14
2.1.8. Bigrado de un vértice . . . . .	14
2.1.9. Matriz de Adyacencia . . . . .	16
2.1.10. Matriz de Adyacencia para Grafos Ponderados . . . . .	17
2.1.11. Influencias Directas . . . . .	18
2.1.12. Influencias Indirectas . . . . .	18
2.1.13. Matriz de Influencias Directas . . . . .	19
2.1.14. Matriz de Influencias Indirectas . . . . .	19
2.1.15. Vector de Dependencias e Influencias Directas . . . . .	19
2.1.16. Vector de Dependencias e Influencias Indirectas . . . . .	19
2.1.17. Importancia de un Vértice . . . . .	20
2.1.18. Plano de Influencias-Dependencias . . . . .	20
2.1.19. Partición . . . . .	21
2.1.20. Fronteras en Grafos Dirigidos . . . . .	22
2.1.21. Partición Adecuada . . . . .	22
2.1.22. Métodos para el cálculo de Influencias Indirectas . . . . .	22
2.1.23. PWP . . . . .	23
2.2. Referente Tecnológico . . . . .	24
2.2.1. Scilab . . . . .	25
2.2.2. Inkscape . . . . .	26
2.3. Referente Gastronómico . . . . .	26
2.3.1. Historia Gauteau Orange . . . . .	26
2.3.2. Receta Gateau Orange . . . . .	27

<b>3. Desarrollo de la investigación</b>	<b>31</b>
3.1. Redes de Procesos - Materiales . . . . .	31
3.1.1. Grafo de Procesos - Materias . . . . .	32
3.1.2. Construcción de un Grafo de Procesos - Materiales . . . . .	32
3.2. Matriz de influencias Directas . . . . .	36
3.3. Aplicaciones . . . . .	49
3.3.1. Grafo procesos-materiales Gateau Orange . . . . .	50
3.4. Operaciones entre grafos Procesos-Materiales . . . . .	76
3.5. Conteo de Grafos Procesos - Materiales . . . . .	79
<b>4. Conclusiones, aportes y alcances</b>	<b>83</b>
4.1. Respecto a los objetivos específicos . . . . .	83
4.2. Respecto al objetivo general . . . . .	84
4.3. Respecto a la hipótesis de investigación . . . . .	84
4.4. Aportes . . . . .	84
4.4.1. Matemático . . . . .	84
4.5. Alcances . . . . .	85
4.5.1. Matemático . . . . .	85
4.5.2. Preguntas Abiertas . . . . .	85

---

# RESUMEN

Esta investigación esta enmarcada dentro del proyecto “Combinatoria y Redes Complejas”, liderado por el Doctor Rafael Díaz, y desarrollado en la Universidad Sergio Arboleda, con el aval de la Dirección de Investigación. El proyecto busca desarrollar modelos y software aplicables a redes biológicas y sociales dentro del marco de la teoría de redes complejas, usando métodos combinatorios. Dentro de esta investigación el objetivo del trabajo es introducir un tipo especial de redes complejas, denominadas redes procesos-materiales, y establecer que información se puede extraer de la aplicación de los algoritmos de influencias indirectas, como el PWP, a las interacciones específicas de procesos-procesos y materiales-materiales, que se obtienen del grafo procesos-materiales, en el cual interactúan una serie de procesos y de materiales, que representan los nodos de la red; las aristas o lados estan representadas por las influencias que ejercen los materiales para llevar a cabo los procesos, y los materiales que a su vez generan los procesos.

**Palabras Claves:** Redes Complejas, Redes Procesos-Materiales, Influencias Indirectas, PWP.

---

# ABSTRACT

This research is framed within the “ Combinatorics and Complex Networks ” project, led by Dr. Rafael Díaz, and developed at the University Sergio Arboleda, with the approval of the Research Department. The project seeks to develop models and software applicable to biological and social networks within the framework of the theory of complex networks , using combinatorial methods. Within this research the objective of the paper is to introduce a special type of complex networks, called - material processes, networks and establish what information can be extracted from the application of algorithms for indirect influences such as PWP, to the interactions processes - processes and interactions materials - materials obtained from the interactions processes - materials graph, which interact in a number of processes and materials, which represent the nodes of the network; the edges or sides are represented by the influences exerted materials to carry out the processes, and materials that turn generate the processes.

**Keywords:** Complex Networks, Networking Process -Materials, Indirect Influences, PWP .

---

# INTRODUCCIÓN

El estudio de la estructura y dinámica de las redes complejas en diferentes áreas del conocimiento, que van desde la física, la biología, la sociología, hasta la internet, entre otras, ha ido aumentando en los últimos años. Su importancia radica en que se presentan en diferentes situaciones de la naturaleza y en diferentes formas de organización, y en que permiten extraer información sobre el comportamiento de ciertos sistemas, a partir de sus componentes individuales, para de esta manera entender o hacer predicciones sobre el mismo.

Las redes complejas surgen de actividades organizadas entre componentes que interactúan entre sí a través de pares, dicha interacción se puede representar a nivel abstracto como nodos conectados por lados, cuyo comportamiento es inesperado, y por lo cual se denominan redes complejas. En lenguaje matemático dichas redes se conocen como grafos.

Un grafo es un conjunto de elementos llamados vértices o nodos, con conexiones entre los nodos, llamadas lados o aristas. Se puede definir un tipo especial de redes o

grafos en las cuales los nodos estan representados por procesos y materiales, que interactuan entre si, de manera que los materiales influncian a los procesos y éstos a su vez producen a otros materiales.

Este tipo de redes que involucran procesos y materiales, no se han estudiado suficientemente desde el punto de vista de las influencias que estos implican entre materiales-materiales y procesos-procesos.

El propósito de esta investigación es introducir las redes procesos-materiales, realizar ejemplos teóricos y prácticos, y establecer que información relevante se puede extraer del cálculo de influencias indirectas en las interacciones de este tipo de redes, es decir, el objetivo es calcular un valor que represente la influencia de un vértice a otro, incluso cuando no existe una arista entre éstos, pero si un camino que los conecta.

El desarrollo del trabajo se llevo a cabo en tres capitulos. En el Capitulo I se hace una descripción de la arqueologia del problema, partiendo de la formulación de una pregunta de investigación y su respectiva hipótesis, además estableciendo los objetivos de investigación. Posteriormente se detalla el estado del arte, que incluye el inicio de las redes complejas y su desarrollo en los ultimos años, los métodos para el cálculo de influencias indirectas, en particular el desarrollo e importancia del Pagerank, método utilizado por Google, asi como la descripcion del metodo PWP, el cual permite el cálculo de influencias indirectas entre los nodos del grafo procesos-materiales, a través de la construcción de la matriz de influencias directas entre ellos, y una aplicación practica que se ha hecho del mismo.

En el Capitulo II se incluyen los referentes teoricos utilizados en la investigación, como los conceptos básicos de la teoria de grafos. En el Capitulo III se desarrolla el concepto de redes de procesos-materiales, mostrando tanto ejemplos teoricos como prácticos, y la aplicación de los algortimos para el cálculo de influencias indirectas, así como las operaciones entre grafos procesos-materiales y los algoritmos para el conteo de los mismos.



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

### 1.1. Formulación del Problema

Durante los últimos años ha sido creciente el estudio de las redes complejas, dada su utilidad en varias ramas del conocimiento, como la física, la biología, la sociología, la neurología, la medicina, entre otras; las redes surgen de actividades organizadas cuyos componentes interactúan entre sí a través de pares. Éstas abundan en la naturaleza y se presentan en diferentes niveles de organización. Por ejemplo algunas redes biológicas, a nivel microscópico, son las redes de regulación genética, redes neuronales, redes de proteínas, redes metabólicas. Por otro lado se encuentran también las redes de comunicación e informática, como la red de internet o las redes de comunicación telefónica.[1] Estas aplicaciones de las redes en situaciones cotidianas, se pueden representar a nivel abstracto como nodos conectados por lados que forman la red, denominada compleja,

entre otras cosas, por los comportamientos inesperados que pueden resultar de las interacciones entre los nodos. En lenguaje matemático una red se conoce como grafo.

El problema que abordamos en éste proyecto fue la construcción de dichas redes complejas en interacciones que involucran influencias entre procesos y materiales[11], con el fin de determinar qué información relevante se puede extraer de la aplicación de la teoría de grafos, en particular de los algoritmos para el cálculo de influencias indirectas como el algoritmo PWP [6]; específicamente las influencias indirectas que ocurren entre materiales-materiales, y entre procesos-procesos. Con el fin de extraer información que no es evidente a simple vista, es decir, datos que no se deducen directamente.

### **1.1.1. Pregunta de Investigación**

¿Qué información respecto a las interacciones materiales-materiales y procesos-procesos, se puede extraer de la aplicación de los algoritmos para el cálculo de influencias indirectas en una red de procesos-materiales?

### **1.1.2. Hipótesis**

A través de los algoritmos para el cálculo de influencias indirectas como el PWP, se puede obtener información importante respecto a las influencias indirectas entre materiales-materiales y procesos-procesos, que actúan en una red procesos-materiales.

## 1.2. Justificación

En teoría de redes, una red compleja hace referencia a un grafo cuyas características son no triviales, se pueden encontrar en diversos contextos, como las redes sociales, las redes biológicas y tecnológicas; dadas sus propiedades las redes complejas no presentan muchas similitudes estructurales entre sí. Es por ello que el enfoque de la investigación se centra en el estudio de un tipo particular de redes, en las cuales interactúan ciertos procesos, que se llevan a cabo a través de la interacción con ciertos materiales, formando en general una red compleja. Es el caso por ejemplo del proceso de degradación enzimática en el cual los procesos son representados por cada uno de las etapas de descontaminación, y los materiales son los microorganismos que interactúan entre sí para dar lugar a otros materiales, las sustancias menos tóxicas.

Sin embargo las redes que implican interacciones entre procesos y materiales[12], no han sido estudiadas desde el punto de vista de las influencias entre materiales-materiales y procesos-procesos, de allí la importancia del trabajo, lograr definir un grafo de procesos-materiales, y establecer qué información relevante de las influencias indirectas de las interacciones de este tipo se puede encontrar. Y de esta manera realizar un aporte al estudio de las redes complejas.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. General

Determinar qué información suministra la aplicación de los algoritmos para influencias indirectas, como el PWP, en redes complejas que involucran interacciones entre materiales y procesos, a través de la construcción del grafo de procesos-procesos y el

grafo materiales-materiales, asociado al grafo de procesos materiales.

### **1.3.2. Específicos**

1.3.2.1. Definir el grafo de procesos-materiales para la aplicación de los algoritmos de influencias indirectas, como el algoritmo PWP, en ejemplos teóricos.

1.3.2.2. Aplicar los algoritmos de influencias indirectas, como el PWP, a redes de procesos-materiales reales.

1.3.2.3. Divulgar la información encontrada en eventos académicos.

## **1.4. Metodología de Investigación**

Dado que el propósito del trabajo es determinar qué información puede suministrar la aplicación de los algoritmos para influencias indirectas en redes complejas, el trabajo hace parte de lo que se denomina una investigación teórica, de tipo descriptiva; ya que lo que se pretende es identificar información respecto a la realidad entre las interacciones de los diferentes componentes que actúan en una red compleja[3], representadas a través de grafos coloreados.

Dentro de la investigación descriptiva, el trabajo se ubica como una investigación predicativa no causal, dado que el objetivo no es establecer las causas de las interacciones entre los diferentes materiales, sino realizar predicaciones sobre el fenómeno de influencias, a través de la aplicación de algoritmos como el PWP.

Para ello el trabajo se desarrolló en tres fases, una fase inicial de revisión bibliográfica, una segunda fase de aplicación de los algoritmos y una fase final de análisis de resultados y construcción del informe final.

### 1.4.1. Revisión Bibliográfica

En esta fase se desarrollaron las siguientes actividades:

- Se hizo una revisión documental de los textos y artículos relacionados en la bibliografía para adquirir familiaridad con los diferentes aspectos de las redes complejas.[14]
- Asimismo el grupo de investigación se reunió de manera regular para estudiar, exponer y analizar cada uno de los avances conducentes a obtener los resultados propuestos.[4]
- Además de la revisión teórica se intentó ejemplificar cada uno de los planteamientos encontrados en las lecturas, con el fin de comprender mejor los conceptos y planteamientos expuestos en los mismos.[2]
- Los ejemplos realizados se llevaron a la exploración computacional, con programas previamente utilizados en otras investigaciones, con el ánimo de identificar, si es posible, generalizaciones, o ejemplos más concretos que aclaren los conceptos.
- Presentación en eventos académicos sobre la información encontrada en la bibliografía.

### 1.4.2. Aplicación de los algoritmos de influencias indirectas

En esta fase se llevo a cabo:

- La instalación del software de uso libre Scilab, y dentro de éste programa el modulo grafos para influencias indirectas [5], desarrollado por el estudiante Jorge Catumba, con el cual se realizaron los cálculos respectivos.
- La instalación del programa de uso libre de dibujo Inkscape, para la graficación de las diferentes redes que se incluyeron en el trabajo.
- El proceso de aprendizaje de los programas anteriormente mencionados.
- La redacción de documentos en los cuales se exponene los detalles de la investigación. También se socializó el trabajo en eventos académicos.
- El inicio de la estructuración del documento: título, objetivos, justificación, marco

teórico.

- La construcción de la definición de grafo de procesos-materiales.
- La construcción de las matrices de adyacencia de los grafos de procesos-materias elaborados con ejemplos teóricos.
- La construcción de las matrices de influencias directas para los grafos procesos-procesos y los grafos materiales-materiales.
- La construcción de las matrices de adyacencia de grafos de procesos- materias de casos reales.
- Aplicación de los algoritmos de influencias indirectas, como el PWP, a los grafos aleatorios construidos y los grafos de procesos-materias aplicado.
- La definición de las operaciones netre grafos procesos-materiales y los algoritmos para el conteo de los mismos.

### **1.4.3. Análisis de Resultados e Informe Final**

En esta fase se desarrollaron las siguientes actividades:

- Análisis de los resultados arrojados por la aplicación de los algoritmos.
- Planteamiento de conclusiones frente a los resultados.
- Elaboración del informe final.
- Elaboración de artículo científico frente al tema.

## **1.5. Estado del Arte**

En lo referente a los algoritmos de influencias indirectas, fue Godet en los años setenta, quien introduce la distinción entre las influencias directas e influencias indirectas que ocurren dentro de una red, calculando las influencias indirectas a partir de cadenas

de influencias directas y bucles de reacción, como los denomino Godet.

El MICMAC es una herramienta que permite desarrollar lo propuesto por Godet, en este método la matriz de influencias indirectas se define como la matriz de influencias directas elevada a un parámetro  $k$ , que normalmente puede ser de 4 ó 5.

Hasta la fecha el método más importante y mejor cualificado para el cálculo de influencias indirectas, es el PageRank, registrado en 1999 por la marca Google. El método se basa en el grafo de la web, compuesto por las páginas de internet, como nodos, y los hyperlinks entre ellas como los lados o aristas. PageRank mide la importancia de las páginas web, mejorando la búsqueda en internet.[13]

El Heat kernel es un método para el cálculo de influencias indirectas introducido por Chung(2007), el cual depende de un parámetro  $\lambda$ , un número real positivo fijado, y en el cual se consideran las influencias en si mismas de cada vértice.

El PWP (2009) es un método para el cálculo de influencias indirectas introducido por Diaz, el cual puede ser aplicado a cualquier matriz de influencias directas, incluso con entradas negativas. Evita las influencias en si mismas de cada vértice, utiliza caminos de varias longitudes para los cálculos y depende también de un parámetro  $\lambda > 0$ .

Los algoritmos se desarrollaran con mayor detenimiento en el marco teórico del trabajo.

La primera aplicación del algoritmo PWP a una red no trivial, fue el trabajo, desarrollado como tesis de pregrado en Matemáticas, “Importancia de las Matemáticas en la Universidad Sergio Arboleda” [8], en el cual se realizó un análisis de los pensum de las diversas carreras de la Universidad, determinando la influencia e importancia de las matemáticas en ésta. En éste estudio se consideró la influencia indirectas de las materias, ostrando la influencias indirecta de una materia a otra, aun sin ser un requisito. La red construida, estaba conformada por las materias como vértices y las aristas o

lados, como los prerrequisitos entre materias.

En lo referente al estudio de las redes de procesos Friedler[7] establece que la estructura de cualquier sistema se puede representar a través de grafos dirigidos bipartidos, que contienen dos tipos de vértices y unidades de procesos para obtener los productos deseados.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Referente Matemático

En la presente sección se mostrarán las principales definiciones de la teoría de grafos utilizadas en la investigación, así como los métodos para el cálculo de influencias indirectas.

#### 2.1.1. Grafos

Un grafo  $G$  es una terna  $(V, E, F)$  donde  $V$  es el conjunto de **vértices** o nodos,  $E$  es el conjunto de **aristas** o arcos y  $F$ , es la función de incidencia, tal que:

$F : E \rightarrow P_1(V) \sqcup P_2(V)$ , donde  $P_1(V)$  y  $P_2(V)$  son la colección de subconjuntos de  $V$  con uno y dos elementos respectivamente.

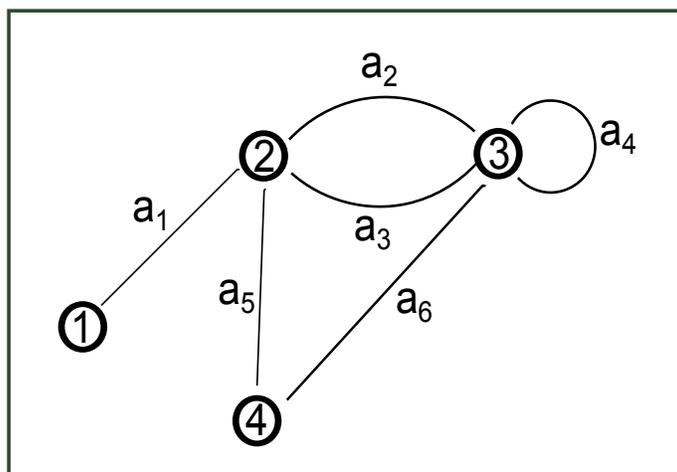


Figura 2.1: Grafo.

**2.1.1 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo con  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ , y  $F$  definida como:

$$f(a_1) = \{1, 2\}, \quad f(a_2) = \{2, 3\},$$

$$f(a_3) = \{2, 3\}, \quad f(a_4) = \{3, 3\},$$

$$f(a_5) = \{2, 4\}, \quad f(a_6) = \{4, 3\}$$

La Figura 2.1 muestra la representación grafica de  $G$ .

### 2.1.2. Grafo Dirigido

Un grafo dirigido o dígrafo es una tupla ordenada  $(V, E, i, f)$  donde  $V$  es el conjunto de vértices,  $E$  el conjunto de aristas o lados, y  $(i, f)$  es una función:

$$(i, f) : E \rightarrow V \times V$$

Dado un lado  $e$ , tenemos que  $i(e)$  es el vértice inicial de  $e$  y  $f(e)$  el vértice final de  $e$ .

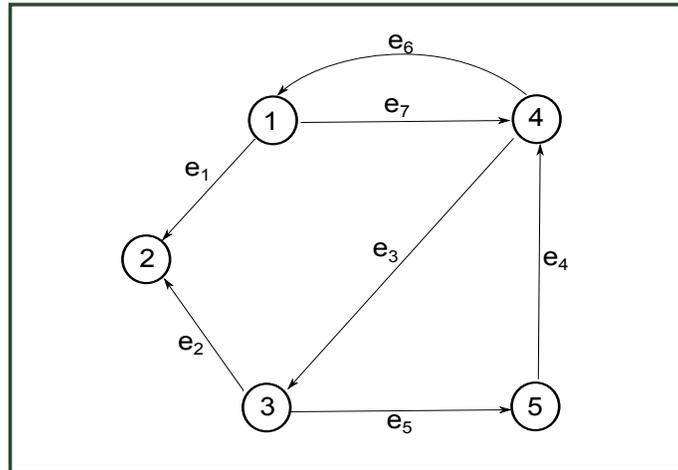


Figura 2.2: Grafo Dirigido.

**2.1.2 Ejemplo.** Se  $G$  un grafo dirigido con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ , e  $(i, f)$  definida como:

$$\begin{aligned}
 (i, f)(e_1) &= (1, 2), \\
 (i, f)(e_2) &= (3, 2), \quad (i, f)(e_3) = (4, 3), \\
 (i, f)(e_4) &= (5, 4), \quad (i, f)(e_5) = (3, 5), \\
 (i, f)(e_6) &= (4, 1), \quad (i, f)(e_7) = (1, 4)
 \end{aligned}$$

La Figura 2.2 muestra la representación gráfica del digrafo  $G$ .

### 2.1.3. Camino Dirigido

Sea  $G$  un grafo dirigido y  $v, w \in V$ . Un camino dirigido de longitud  $n$ , de un vértice  $v$  a un vértice  $w$  es una sucesión de lados  $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ , tal que:

- $i(e_1) = v$
- $f(e_i) = i(e_{i+1})$

- $f(e_n) = w$

**2.1.3 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo dirigido con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , y  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ , los caminos dirigidos en el grafo de la Figura 2.2 son:

- del vértice 5 al vértice 2 está dado por  $(e_4, e_6, e_1)$
- del vértice 5 al vértice 4,  $(e_4, e_6, e_7)$
- del vértice 1 al vértice 5,  $(e_7, e_3, e_5)$
- del vértice 3 al vértice 2,  $(e_5, e_4, e_6, e_1)$
- del vértice 3 al vértice 1,  $(e_5, e_4, e_6)$
- del vértice 1 al vértice 3,  $(e_7, e_3)$
- del vértice 5 al vértice 1,  $(e_4, e_6)$
- del vértice 4 al vértice 5,  $(e_3, e_5)$
- del vértice 4 al vértice 2,  $(e_6, e_1)$

#### 2.1.4. Grafo Ponderado

Un grafo ponderado o con peso es una tupla  $G = (V, E, F, w)$ , donde a cada lado  $e \in E$  se le asigna un valor real  $w(e)$  llamado peso. Es decir  $w$  es una función tal que:

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$

**2.1.4 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo con peso donde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , y sea  $\{1, 2\} = e_1$ , se tiene que  $w(e_1) = 3$  como se muestra en la Figura 2.3

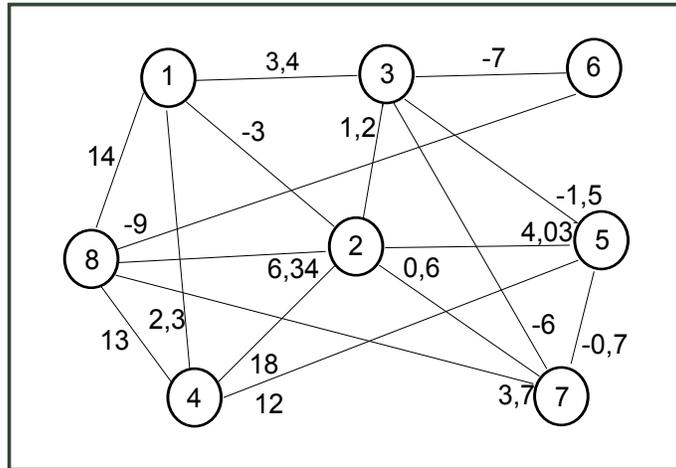


Figura 2.3: Grafo Ponderado.

### 2.1.5. Grafo Coloreado

Un grafo coloreado es una tupla  $G = (V, E, c)$ , con un conjunto  $S = \{a, b, \dots\}$  denominado colores. Una coloración de  $G$  con colores en  $S$  es una función  $c$  tal que[10]:

$$c : V(G) \rightarrow S$$

de forma que  $c(v) \neq c(w)$  si  $\{v, w\} \in E$ .

**2.1.5 Observación.** En este trabajo los grafos son bicolorados, es decir,  $c : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ , donde 0 =blanco y 1=negro.

**2.1.6 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo y  $S = \{azul, blanco, rojo, verde\}$ , una coloración de  $G$ , se muestra en la Figura 2.4.

### 2.1.6. Grafo Dirigido y Coloreado

Un grafo dirigido y coloreado es una tupla  $G = (V, E, i, f)$ , con un conjunto  $S = \{a, b, \dots\}$  denominado colores. Una coloración de  $G$  con colores en  $S$  es una función  $c$  tal que:

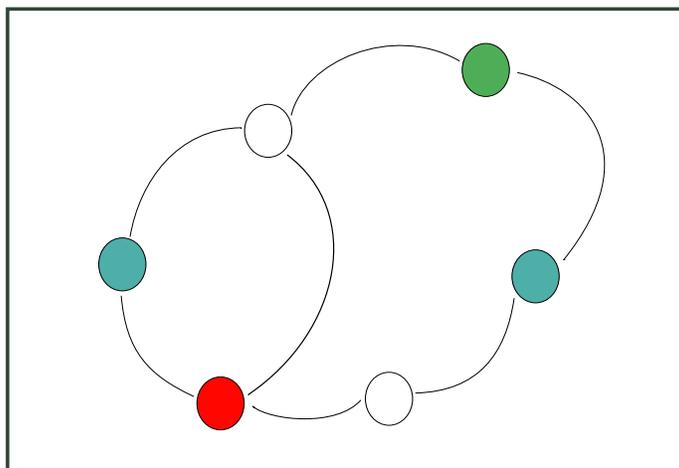


Figura 2.4: Grafo Coloreado.

$$c : V(G) \rightarrow S$$

de forma que  $c(v) \neq c(w)$  si  $(v, w) \in E$ .

**2.1.7 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo dirigido y  $S = \{\text{morado}, \text{rojo}, \text{azul}, \text{amarillo}\}$ , una coloración de  $G$ , se muestra en la Figura 2.5.

### 2.1.7. Grado de un Vértice

Sea  $G$  un grafo y  $v$  un vértice de  $G$ . El grado de  $v$ , denotado  $\text{deg}(v)$ , es el número de aristas de  $G$  que inciden en  $v$ .

**2.1.8 Ejemplo.** Sea  $G$  el grafo que se muestra en la Figura 2.6, con  $V = \{1, 2, 3\}$ , tenemos que  $\text{deg}1 = 3$ ,  $\text{deg}2 = 3$  y  $\text{deg}3 = 2$ .

### 2.1.8. Bigrado de un vértice

Sea  $G$  un grafo dirigido con peso, y  $v$  un vértice de  $G$ . El grado de  $v$ , denotado  $g(v)$  esta dado por:  $g(v) = (i(v), o(v))$ , donde  $i(v)$  es la suma de los pesos de los lados que

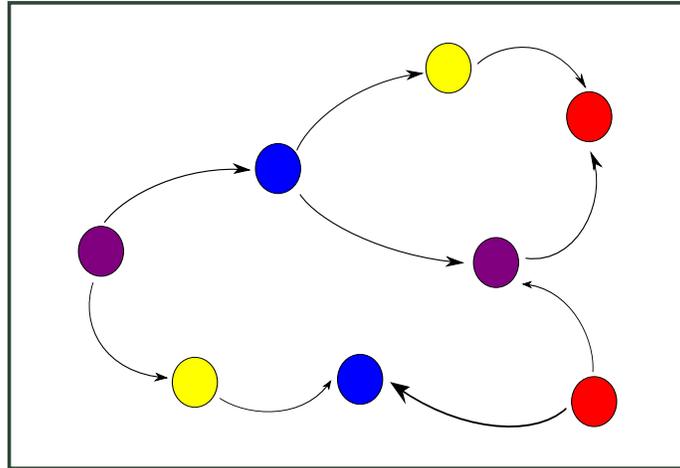


Figura 2.5: Digrafo Coloreado.

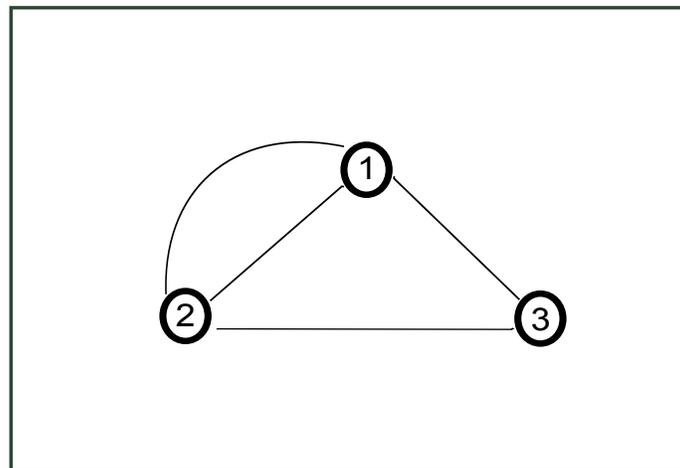


Figura 2.6: Grado Vértice.

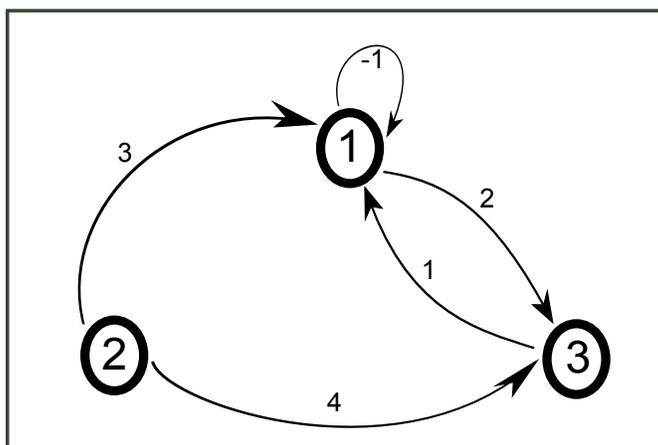


Figura 2.7: Grado de un Vértice en un Grafo con Peso.

entran a  $v$ , y  $o(v)$  es la suma de los pesos de los lados que salen de  $v$ , es decir,

$$i(v) = \sum_{e \in E, i(e)=v} w(e) \quad (2.1)$$

y

$$o(v) = \sum_{e \in E, f(e)=v} w(e) \quad (2.2)$$

**2.1.9 Ejemplo.** Sea  $G$  el grafo dirigido con pesos que se muestra en la Figura 2.7, con  $V = \{1, 2, 3\}$ , tenemos que  $g(1) = (3, 1)$ ,  $g(2) = (0, 7)$  y  $g(3) = (6, 1)$ .

### 2.1.9. Matriz de Adyacencia

Sea  $G$  un grafo dirigido con  $n$  vértices. La matriz de adyacencia de  $G$  denotada por  $D_G$ , es la matriz de orden  $n \times n$ , tal que para cada par  $(i, j)$ , se tiene que:

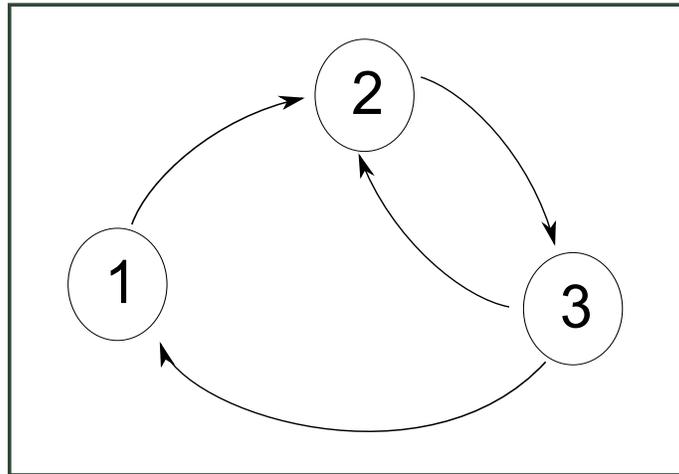


Figura 2.8: Grafo Dirigido 1.

$$D_G(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un lado de } j \text{ a } i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**2.1.10 Ejemplo.** Sea  $G$  el grafo que se muestra en la Figura 2.8, con  $V = \{1, 2, 3\}$ , la matriz de adyacencia  $D_G$  asociada a  $G$  esta dada por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.1.10. Matriz de Adyacencia para Grafos Ponderados

Sea  $G = (V, E, F, i, f, W)$  un grafo dirigido con  $n$  vértices. La matriz de adyacencia  $D_G$  de  $G$ , es la matriz tal que para cada par  $(i, j) \in V$ , se tiene:

$$D_G(i, j) = \sum_{i(e)=i, f(e)=j} w(e) \tag{2.3}$$

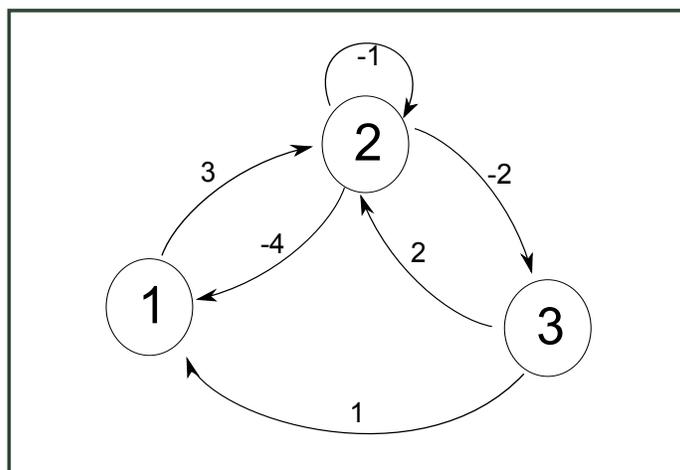


Figura 2.9: Grafo Ponderado 1.

**2.1.11 Ejemplo.** Sea  $G$  el grafo ponderado que se muestra en la Figura 2.9, con  $V = \{1, 2, 3\}$ , la matriz de adyacencia  $D_G$  asociada a  $G$  esta dada por:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.1.11. Influencias Directas

Dado un grafo dirigido  $G = (V, E, i, f)$ , decimos que un vértice  $v_1$  ejerce una influencia directa sobre un vértice  $v_2$ , si existe una arista  $(v_1, v_2) \in E$ .

### 2.1.12. Influencias Indirectas

Intuitivamente dado un grafo dirigido  $G = (V, E, i, f)$ , decimos que un vértice  $v_1$  ejerce una influencia indirecta sobre un vértice  $v_2$ , si existe un camino dirigido de  $v_1$  a  $v_2$ .

### 2.1.13. Matriz de Influencias Directas

Dado un grafo dirigido con peso  $G$ , la matriz de influencias directas esta representada por la matriz de adyacencia  $D_G$ .

### 2.1.14. Matriz de Influencias Indirectas

Dado un grafo dirigido  $G$ , la matriz de influencias indirectas  $T = T_G$  asociada a  $G$ , se obtiene aplicando algún método para el cálculo de influencias indirectas, a la matriz de influencias directas  $D_G$ .

### 2.1.15. Vector de Dependencias e Influencias Directas

El vector de dependencias y de influencias de la matriz de influencias directas  $D_G$ , se denota  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ , y  $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$  respectivamente. Donde los coeficientes  $d_j$  y  $f_j$  estan representados por:

$$d_j = \sum_{i=1}^n D_{ji} \tag{2.4}$$

y

$$f_j = \sum_{i=1}^n D_{ij} \tag{2.5}$$

La pareja  $(d_j, f_j)$  representa el grado del vértice en el grafo de influencias directas.

### 2.1.16. Vector de Dependencias e Influencias Indirectas

El vector de dependencias y de influencias de la matriz de influencias indirectas  $T$ , se denota  $d = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ , y  $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$  respectivamente. Donde los

coeficientes  $d_j$  y  $f_j$  estan representados por:

$$d_j = \sum_{i=1}^n T_{ji} \quad (2.6)$$

y

$$f_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} \quad (2.7)$$

La pareja  $(d_j, f_j)$  representa el grado del vértice en el grafo de influencias indirectas.

### 2.1.17. Importancia de un Vértice

Dado un digrafo  $G$  y  $T(G)$  la matriz de influencias indirectas asociada a  $G$ , la importancia de cada vértice  $v \in V$ , se define como la suma de la dependencia e influencia de  $v$ , es decir, para cada  $v \in V$  su importancia  $v_j$  está dada por:

$$v_j = d_j + f_j \quad (2.8)$$

### 2.1.18. Plano de Influencias-Dependencias

Según Godet el conjunto de variables de un sistema puede representarse en un plano de dispersión o "plano de motricidad-dependencia", dicho plano será denominado en el trabajo "plano de influencia-dependencia", como se muestra en la Figura 2.10.

Godet dividió el plano en cinco sectores:

- **Sector 1:** En este sector se encuentran las variables motrices (para el trabajo influyentes) y poco dependientes. Estas variables son las que condicionan el sistema.
- **Sector 2:** Variables a la vez muy dependientes y motrices (influyentes).

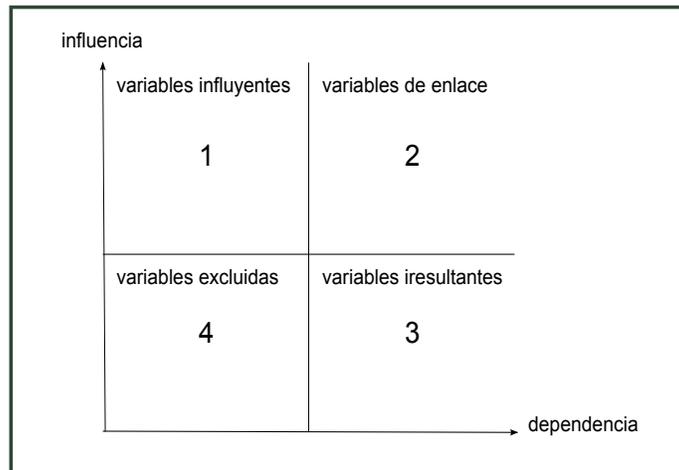


Figura 2.10: Plano influencias-dependencias.

- **Sector 3:** Variables poco motrices (influyentes) y muy dependientes. Son variables cuya evolución se explica de las variables dde los sectores 1 y 2.
- **Sector 4:** Variables poco dependientes y poco motrices (influyentes). Estas variables no son deterministas en el futuro del sistema.

Cada vértice  $i$  representa un punto en el plano representado por la pareja ordenada  $(d_i, f_i)$ , donde  $d_i$  es el valor de dependencia en el vector  $d$  y  $f_i$  es el valor de influencia en el vector  $f$ .

### 2.1.19. Partición

Una partición  $\pi$  del conjunto  $V$  es una familia de subconjuntos no vacíos de  $V$  tal que:

1. para todo  $a, b \in \pi$ ,  $a \cap b \neq \emptyset$ .

2.  $V = \bigcup_{a \in \pi} a$ .

### 2.1.20. Fronteras en Grafos Dirigidos

Sea  $G = (V, E, i, f)$  un grafo dirigido y  $A \subseteq V$ , la frontera de  $A$ , denotada  $\partial A$ , está dada por:

$$\partial A = \{a \in A / \text{existe un } b \text{ tal que } b \notin A \text{ y } (a, b) \in E \text{ ó } (b, a) \in E\}$$

### 2.1.21. Partición Adecuada

Sea  $V$  un conjunto de vértices de un grafo dirigido y coloreado  $G = (V, E, I, F, c)$ ,  $\pi$  es una partición adecuada de  $V$ , si para todo bloque  $A \in \pi$ ,  $\partial A \subseteq V$  es monocromática, es decir, la función  $c$ , es tal que:

$$c : \partial A \rightarrow \{0, 1\}$$

es constante.

### 2.1.22. Métodos para el cálculo de Influencias Indirectas

- MICMAC: Sea  $D$  la matriz asociada con el grafo de influencias directas. El grafo de influencias indirectas esta representado por la matriz  $T = D^K$  donde  $k$  es un número natural pequeño, como 4 o 5. El vector de dependencias indirectas  $d = (d_1, \dots, d_n)$  y el vector de influencias indirectas  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , son tales que sus coeficientes  $d_j$  y  $f_j$  estan dados, respectivamente, por la ecuación 2.4 y 2.5.  $(d_i, f_j)$  es el grado del vértice  $j$  en el grafo de influencias indirectas[9].

- PageRank: Sea  $D$  la matriz  $n \times n$  de influencias directas cuyas entredas son números reales no negativos. Se asume que la suma de las entradas de cada columna de  $D$  es 0

o 1. La matriz de influencias indirectas  $T = T(D)$  esta dada por:

$$T = T(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} [p\bar{D} + (1-p)E_n]^k, \quad (2.9)$$

donde:

- el parámetro  $0 < p < 1$  es un número escogido cercano a 1, digamos  $p = 0,86$ .
- $\bar{D}$  es la matriz obtenida al reemplazar las entradas de cada columna cero, en la matriz  $D$ , por  $\frac{1}{n}$ .
- $E_n$  es la matriz con entradas iguales a  $\frac{1}{n}$ .

- Heat Kernel: Dada  $D$ , la matriz de influencias directas, la matriz de influencias indirectas  $T = T(D)$  es dada para un parámetro  $\lambda > 0$ , por:

$$T = T(D) = e^{\lambda(D-I)}, \quad (2.10)$$

donde  $I$  es la matriz identidad del tamaño apropiado. Cuando  $D = 0$  la matriz de influencias indirectas  $T = T(D)$  esta dada por  $T = T(0) = e^{-\lambda I}$ .

### 2.1.23. PWP

El PWP es un método para el conteo de influencias indirectas basado en tres premisas:

- Las influencias directas generan, por concatenaciones, las influencias indirectas.
- Toda influencia indirecta surge de la concatenación de influencias directas.
- Concatenaciones de una mayor longitud ejercen una menor influencia indirecta.

El método utiliza un escenario discreto donde las variables están ordenadas e identificadas, con el conjunto  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  para algún  $n \in \mathbb{N}_+$ . Las influencias directas entre las variables están codificadas dentro de un grafo dirigido  $\mathbb{R}$  – ponderado con  $[n]$  como conjunto de vértices, tal que la influencia directa de la variable  $j \in [n]$  a la variable  $i \in [n]$  corresponde con una arista de peso  $D_{ij}$  del vértice  $j$  al vértice  $i$ ,  $D$  es la matriz de influencias directas, tal que  $D_{ij}$  es el peso del lado de  $j$  a  $i$  si existe, y  $D_{ij} = 0$  de otro modo.

El objetivo del método PWP es evaluar la influencia indirecta entre las variables, es decir, encontrar una matriz  $T$  tal que  $T_{ij}$  mide la influencia indirecta de la variable  $j$  a la variable  $i$ . Se puede aplicar a cualquier matriz de influencia directa, incluyendo las matrices que tienen entradas negativas. El PWP toma en cuenta caminos de varias longitudes y evita las influencias de los vértices en sí mismos.

Dada una matriz  $D$  de influencias directas y un parámetro  $\lambda > 0$ , la matriz de influencias indirectas  $T$ , está dada por:

$$T = T(D) = \frac{e^{\lambda D} - I}{e^\lambda - 1} = \frac{e_+^{\lambda D}}{e_+^\lambda}, \quad (2.11)$$

donde

$$e_+^x = e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

## 2.2. Referente Tecnológico

En la presente sección se realizará una descripción de los software utilizados en el trabajo.

### 2.2.1. Scilab

Scilab es un software matemático libre, con un lenguaje de programación de alto nivel, para cálculo científico, interactivo de libre uso y disponible en múltiples sistemas operativos (Mac OS X, GNU/Linux, Windows). Desarrollado por INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) y la ENPC (École Nationale des Ponts et Chaussées) desde 1990, por Scilab Consortium dentro de la fundación Digiteo desde 2008, Scilab es ahora desarrollado por Scilab Enterprises desde julio 2012.

Scilab fue creado para hacer cálculos numéricos aunque también ofrece la posibilidad de hacer algunos cálculos simbólicos como derivadas de funciones polinomiales y racionales. Posee cientos de funciones matemáticas y la posibilidad de integrar programas en los lenguajes más usados (Fortran, Java, C y C++). La integración puede ser de dos formas: por ejemplo, un programa en Fortran que utilice Scilab o viceversa.<sup>1</sup> Scilab fue hecho para ser un sistema abierto donde el usuario pueda definir nuevos tipos de datos y operaciones entre los mismos.

Scilab viene con numerosas herramientas: gráficos 2-D y 3-D, animación, álgebra lineal, matrices dispersas, polinomios y funciones racionales, Simulación: programas de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales (explícitas e implícitas), Xcos: simulador por diagramas en bloque de sistemas dinámicos híbridos, Control clásico, robusto, optimización LMI, Optimización diferenciable y no diferenciable, Tratamiento de señales, Grafos y redes, Scilab paralelo empleando PVM, Estadísticas, Creación de GUIs, Interfaz con el cálculo simbólico (Maple, MuPAD), Interfaz con TCL/TK.

Además se pueden agregar numerosas herramientas o toolboxes hechas por los usuarios como Grocer una herramienta para Econometría u Open FEM (Una caja de Herramientas para Elementos Finitos), hecha por INRIA.

### **2.2.2. Inkscape**

Inkscape es un editor de gráficos en formato vectoriales SVG, gratuito, libre y multiplataforma. Las características de SVG soportadas incluyen formas básicas, trayectorias, texto, canal alfa, transformaciones, gradientes, edición de nodos, exportación de SVG a PNG, agrupación de elementos, etc.

Inkscape tiene como objetivo proporcionar a los usuarios una herramienta libre de código abierto de elaboración de gráficos en formato vectorial escalable (SVG) que cumpla completamente con los estándares XML, SVG y CSS2.

Inkscape se encuentra desarrollado principalmente para el sistema operativo GNU/Linux, pero es una herramienta multiplataforma y funciona en Windows, Mac OS X, y otros sistemas derivados de Unix.

Es una aplicación disponible en muchas lenguas, incluyendo sistemas de escritura complejos (como sistemas de escritura de derecha a izquierda como árabe, hebreo...).

Este programa surgió de una bifurcación del proyecto Sodipodi.

## **2.3. Referente Gastronómico**

En ésta sección se presenta la historia y receta estandarizada de la torta francesa Gauteau Orange.

### **2.3.1. Historia Gauteau Orange**

Esta es una torta que fue originada por el error de un aprendiz de pastelería que dio origen a la tan conocida (ganache). Este habría echado por error nata caliente en un chocolate, por lo que su maestro le habría tratado de (ganache), cuyo significado en

español es tonto o incompetente, lejos de quedar inutilizable, la crema se aprovecho con éxito y conservo su nombre del insulto. De allí toma una gran idea el famoso pastelero François Massialot (fue encargado de la mesa del rey en diversas corte a final del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII), el cual fue el creador de la famosa (creme brulee) y decide reunir en una misma preparación variedad de sabores y texturas nunca antes probadas en sus cocinas y en el resto del continente François Massialot decide mezclar la untuosidad y cremosidad del ganache de chocolate donde sobresale su fuerte pero a su vez delicado sabor del cacao, también decide utilizar su creación la creme brulee dándole un toque personal como lo es la naranja el cual según François daría ese toque inesperado en su tradicional sabor ya conocido, se da cuenta que necesita una base que afirme estas dos preparaciones y así es donde decide utilizar una masa suave y esponjosa la cual fue una masa de chocolate. Finalmente fue añadida una mousse de chocolate la cual compensaría el sabor de esta maravillosa torta donde se destacaría el chocolate den tres versiones con fresco sabor de la naranja en la creme brulee.

### 2.3.2. Receta Gateau Orange

Gateau Orange - Earl Grey

Creme Brulee de naranjas

INGREDIENTES

- 75  $cm^3$  Jugo de naranja
- 2 U Ralladura de naranja
- 35  $cm^3$  leche
- 190  $cm^3$  crema de leche

- 75 gr Azúcar
- 80 gr yema de huevo
- 4 gr Gelatina sin sabor

Mousse de chocolate al té

- 10 gr Te
- 300  $cm^3$  Crema de Leche
- 108 gr Yema de Huevo
- 55 gr Huevo
- 80  $cm^3$  Agua
- 150 gr Azúcar
- 165 gr Chocolate semi amargo
- 165 gr Chocolate con leche
- 300  $cm^3$  Crema de leche
- 10 gr gelatina sin sabor

Masa Oscura de Chocolate

- 240 gr Azucar
- 120 gr Harina de trigo
- 60 gr cacao amargo

- 2 gr bicarbonato de sodio
- 1 gr polvo para hornear
- 4 gr sal fina
- 4 gr canela molida
- 60 gr huevo
- 110  $cm^3$  crema de leche
- 7  $cm^3$  jugo de limón
- 60  $cm^3$  aceite de girasol
- 7  $cm^3$  esencia de vainilla
- 120  $cm^3$  agua

## PREPARACION

### CREME BRULEE

- Mezclar el jugo de naranja con las yemas y el azúcar. Calentar la leche y la crema con la ralladura de naranja. Volcar sobre la gelatina hidratada y sobre las yemas.
- Hornear en moldes de flexipan de 16 cm de diámetro.
- Congelar una vez cocida y desmoldar.

### MOUSSE DE CHOCOLATE AL TE

- Hacer una infusión con el té y los 300 gr de crema. Llevar a primer hervor y volcar sobre los chocolates picados para hacer una ganache. Enfriar. Colocar las yemas y el huevo con el azúcar y el agua sobre baño de María y batir hasta que lleguen a 80°C. Continuar con el batido en batidora hasta que la temperatura ambiente. Agregar la

gelatina hidratada y fundida al batido de los huevos. Incorporar la ganache fría a la crema restante semibatida.

- Por último, mezclar ambas preparaciones con movimientos suaves

#### MASA OSCURA DE CHOCOLATE

- Tamizar los secos, Batir ligeramente los huevos con la crema, el aceite, vainilla y limón.
- Unir los secos y formar una pasta. Agregar agua a temperatura ambiente y batir por medio minuto.
- Colocar en una lata de 30 x 40 cm.
- Cocinar en horno a 180°c durante 15 a 20 minutos.

#### ARMADO

- Cortar 1 Banda de biscuit relieve.
- Cortar 2 discos de biscuit de chocolate.
- En un aro con acetato colocar la banda de relieve y en el fondo un disco de biscuit.
- Colocar una capa de mousse, un disco de biscuit, el palet de naranjas y cubrir con la mousse. Congelar, desmoldar, decorar y mantener en refrigeración.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.1. Redes de Procesos - Materiales

Una red compleja es una red de procesos - materiales si sus nodos son de dos tipos: nodos procesos y nodos materiales, es decir, son redes coloreadas donde cada nodo esta representado por un color, en el trabajo se utilizó blanco o negro, donde blanco representa los materiales y negro los procesos; y donde dos vértices adyacentes poseen colores distintos. Ya que en una red de procesos- materiales, los materiales influyen a los procesos y éstos a su vez influyen a otros materiales. A continuación se define y ejemplifica un grafo de procesos - materiales, la matriz de influencias directas para una red de procesos-materiales, la matriz de influencias directas para una red de procesos - procesos, y materiales - materiales. Además se definen las operaciones entre éste tipo de grafos y los algoritmos para su conteo.

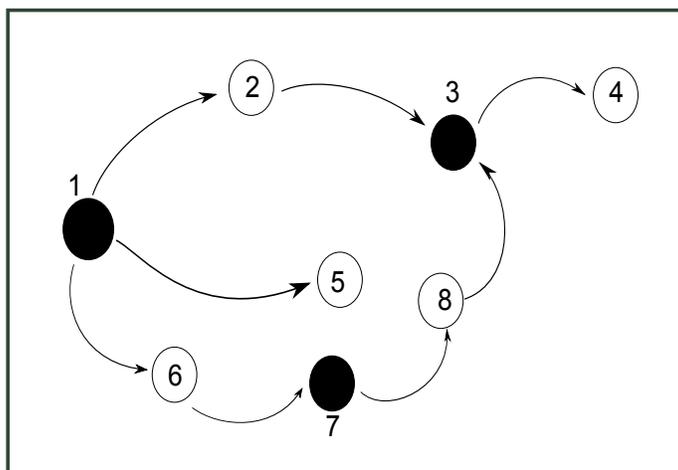


Figura 3.1: Grafo Procesos-Materiales.

### 3.1.1. Grafo de Procesos - Materias

Un grafo de procesos - materias  $G = (V, E, i, f, C)$  es un grafo dirigido y bicoloreado, donde  $C$  es una función tal que:

$$C : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$$

de forma que  $C(v) \neq C(w)$  si  $(v, w) \in E$ .

**3.1.1 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo de procesos - materiales, con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , 1 = blanco y 0 = negro, la Figura 3.1 muestra la representación gráfica de  $G$ .

### 3.1.2. Construcción de un Grafo de Procesos - Materiales

Dado un grafo dirigido  $G = (V, E, i, f)$ ,  $G$  se puede convertir en un grafo de procesos - materiales de la siguiente manera: Sea  $c : V \rightarrow \{0, 1\}$ , donde 1=negro y 0=blanco

1.  $c(v) = 1$  si  $deg(v) \geq 3$  y  $c(v) = 0$  si  $deg(v) \leq 2$ , para todo  $v \in V$

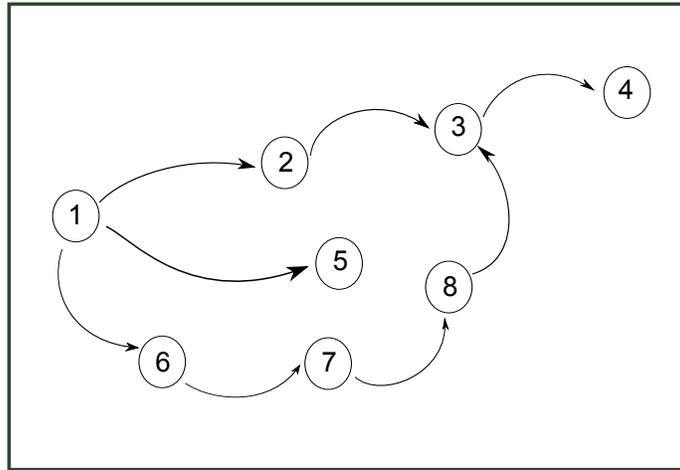


Figura 3.2: Grafo Dirigido 2.

2. Dados dos vértices adyacentes  $c(v_1) = c(v_2) = 1 \in V$ , tal que  $i(e) = v_1$  es el vértice inicial y  $f(e) = v_2$  es el vértice final de la arista  $e \in E$ , existe un vértice  $c(d) = 0$ , tal que  $i(e_1) = v_1$  y  $f(e_1) = d$  son los vértices inicial y final respectivamente de  $e_1$ , y  $i(e_2) = d$  y  $f(e_2) = v_2$  son los vértices inicial y final respectivamente de  $e_2$ .
3. Si  $v_1$  y  $v_2 \in V$  son dos vértices adyacentes tales que  $c(v_1) = c(v_2) = 0$ , donde  $v_1$  es el vértice inicial y  $v_2$  es el vértice final de la arista  $e \in E$ , existe un vértice  $b = 1$  tal que  $i(e_1) = v_1$  y  $f(e_1) = b$  son los vértices inicial y final respectivamente de  $e_1$ , y  $i(e_2) = b$  y  $f(e_2) = v_2$  son los vértices inicial y final respectivamente de  $e_2$ .

**3.1.2 Ejemplo.** Sea  $G = (V, E, i, f)$  el grafo dirigido representado graficamente como se muestra en la Figura 3.2, con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $G_1$  es el grafo bicolorado que muestra la Figura 3.3, y  $G_2$  es el grafo de procesos con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  que muestra la Figura 3.4.

**3.1.3 Ejemplo.** Sea  $G = (V, E, i, f)$  el grafo dirigido representado graficamente como se muestra en la Figura 3.5, con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ,  $G_1$  es el grafo bicolorado que muestra la Figura 3.6, y  $G_2$  es el grafo de procesos con  $V = \{1, 12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$  que muestra la Figura ??.

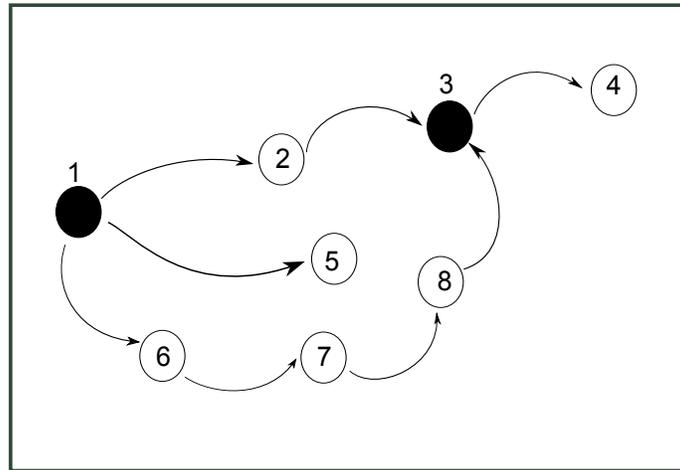


Figura 3.3: Grafo Bicolorado 1.

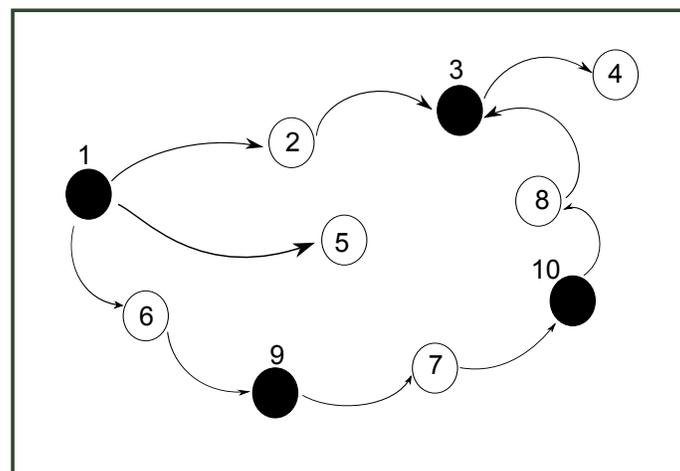


Figura 3.4: Grafo Procesos - materiales 1.

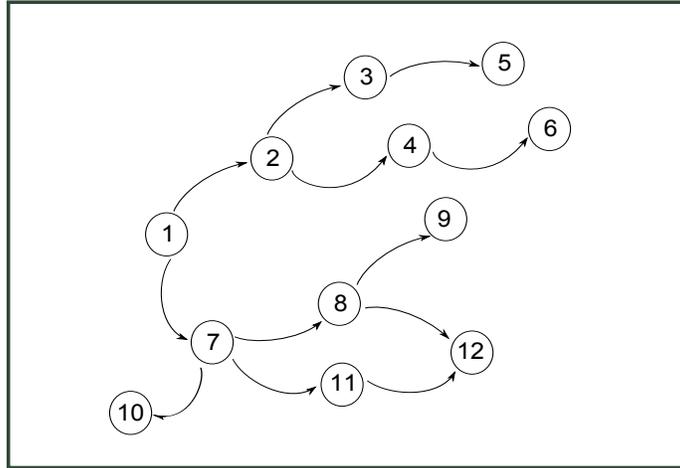


Figura 3.5: Grafo Dirigido 3.

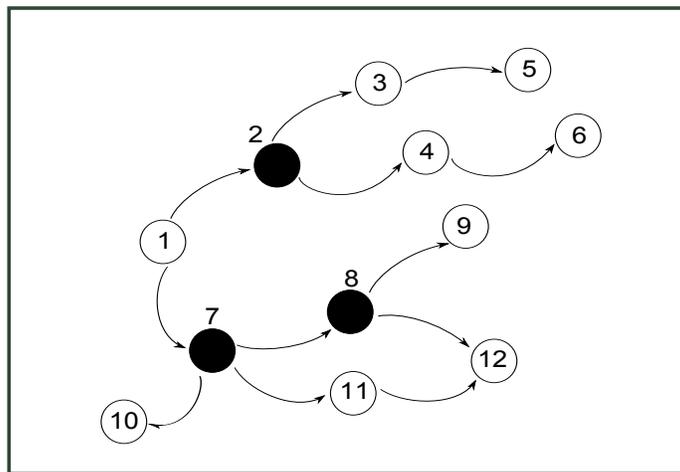


Figura 3.6: Grafo Bicoloreado 2.

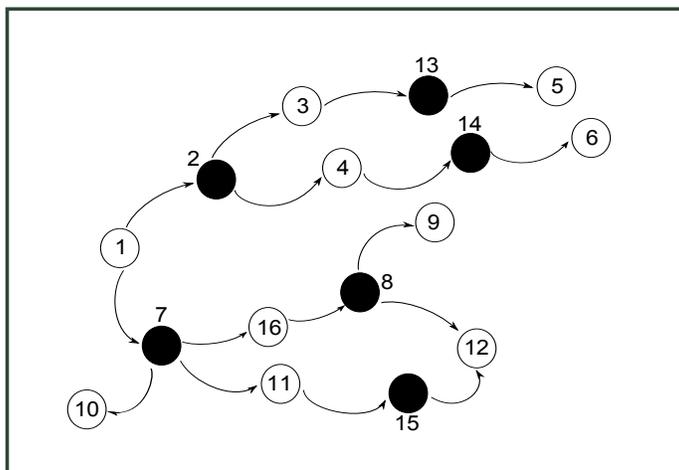


Figura 3.7: Grafo Procesos-materiales 2.

## 3.2. Matriz de influencias Directas

Sea  $G$  un grafo de procesos-materiales, asumiendo que los vértices de  $G$  están enumerados de 1 a  $n$ , y ordenados por materiales y procesos.  $M$  es la matriz de influencias directas en la red de procesos y materiales, P-m, tal que  $M = D_G$ , donde  $D_G$  corresponde a la matriz de adyacencia de  $G$ .

La matriz de influencias directas para materiales y procesos está dada por  $\sum_{k=1}^n M^2$ : tal que

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^r M_{ik}M_{kj} \quad (3.1)$$

donde  $m$  corresponde a la matriz de influencias directas para la red de materiales - materiales, m-m.

$$P_{ab} = \sum_{n=1}^t M_{an}M_{nb} \quad (3.2)$$

donde  $P$  corresponde a la matriz de influencias directas para la red de procesos - procesos, P-P.

**3.2.1 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo de procesos - materias, representado en la Figura 3.8.

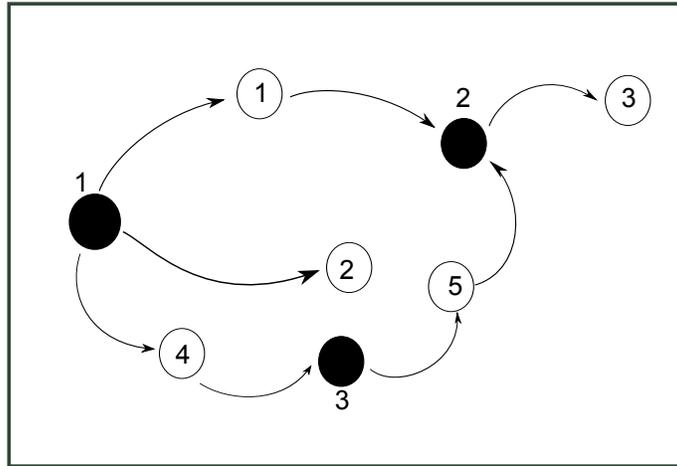


Figura 3.8: Grafo Procesos - materiales 3.

La matriz de influencias directas  $M$  asociada a  $G$  esta dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de influencias directas para procesos y materiales, esta dada por:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde  $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matriz de influencias directas para m-m.

$$Y P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de influencias directas para p-p.

A partir de la aplicación de los métodos para el cálculo de influencias indirectas se obtienen los siguientes resultados:

- PWP:

Materiales	Influencias Indirectas m-m
1	0.2857143
2	0
3	0
4	0.4285714
5	0.2857143

De acuerdo a la tabla se tiene que:

- El material mas influyente indirectamente es el 4.
- Los materiales menos influyentes indirectamente son el 1 y el 5.

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
1	0
2	0
3	0.7142857
4	0
5	0.2857143

- El material mas dependiente indirectamente es el 3.
- El material menos dependiente indirectamente es el 5.

En cuanto a las influencias indirectas entre procesos, los resultados fueron:

Procesos	Influencias Indirectas P-P
1	0.7142857
2	0
3	0.2857143

- El proceso mas influyente indirectamente es el 1.
- El proceso menos influyente indirectamente es el 3.

Procesos	Dependencias Indirectas P-P
1	0
2	0.7142857
3	0.2857143

- El proceso mas dependiente indirectamente es el 2.
- El proceso menos dependiente indirectamente es el 3.

- MICMAC:

Materiales	Influencias Indirectas m-m
1	0
2	0
3	0
4	1
5	0

- El material influyente indirectamente es el 4.

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
1	0
2	0
3	1
4	0
5	0

- El material dependiente indirectamente es el 3.

Procesos	Influencias Indirectas P-P
1	1
2	0
3	0

- El proceso influyente indirectamente es el 1.

Procesos	Dependencias Indirectas P-P
1	0
2	1
3	0

- El proceso dependiente indirectamente es el 2.

- HEATKERNEL:

Materiales	Influencias Indirectas m-m
1	0.2352941
2	0.1176471
3	0.1176471
4	0.2941176
5	0.2352941

- El material más influyente indirectamente es el 4.
- Los materiales menos influyentes indirectamente son el 2 y 3.

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
1	0.1176471
2	0.1176471
3	0.4117647
4	0.1176471
5	0.2352941

- El material más dependiente indirectamente es el 3.
- Los materiales menos dependientes indirectamente son el 1, 2 y 4.

Procesos	Influencias Indirectas P-P
1	0.5384615
2	0.1538462
3	0.3076923

- El proceso más influyente indirectamente es el 1.
- El proceso menos influyente indirectamente es el 2.

Procesos	Dependencias Indirectas P-P
1	0.1538462
2	0.5384615
3	0.3076923

- El proceso más dependiente indirectamente es el 2.
- El proceso menos dependiente indirectamente es el 1.

- PAGERANK:

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
1	0.1208824
2	0.1208824
3	0.4137202
4	0.1208824
5	0.2236325

- El material más dependiente indirectamente es el 3.
  
- Los materiales menos dependientes indirectamente son el 1, 2 y 4.

Procesos	Dependencias Indirectas P-P
1	0.1975796
2	0.5208694
3	0.281551

- El proceso más dependiente indirectamente es el 2.
  
- El proceso menos dependiente indirectamente es el 1.

**3.2.2 Ejemplo.** Sea  $G$  un grafo de procesos-materias, representado en la Figura 3.9.

La matriz de influencias directas  $M$  asociada a  $G$  esta dada por:



La matriz de influencias directas para procesos y materiales, esta dada por:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde  $m =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de influencias directas

para m-m.

$$Y P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de influencias directas para p-p.

Aplicando los métodos para el cálculo de influencias indirectas se obtuvieron los siguientes resultados:

- PWP:

Materiales	Influencias Indirectas m-m
1	0.6
2	0.08
3	0
4	0.08
5	0
6	0
7	0.16
8	0.08
9	0
10	0

De acuerdo a la tabla se tiene que:

- El material más influyente indirectamente es el 7.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Los materiales menos influyentes indirectamente son 2, 4 y el 8.

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
1	0
2	0.08
3	0.12
4	0.08
5	0.12
6	0.12
7	0.08
8	0.08
9	0.24
10	0.08

- El material más dependiente indirectamente es el 9.
- Los materiales menos dependientes indirectamente son 2,4,7,8 y 10.

Los resultados de influencias indirectas para la red p-p, fueron:

Procesos	Influencias Indirectas P-P
1	0.5
2	0
3	0
4	0.5
5	0
6	0

- Los procesos influyentes indirectamente son 1 y 4.

Procesos	Dependencias Indirectas P-P
1	0
2	0.25
3	0.25
4	0
5	0.25
6	0.25

- Los procesos dependientes indirectamente y en la misma cantidad son 2, 3, 5 y 6.

### 3.3. Aplicaciones

Los grafos procesos - materiales se encuentran en diversas situaciones, en las cuales interactúan materiales y procesos de manera que un conjunto de materiales inflencias a un conjunto de procesos, dando lugar a su vez a otros materiales. Dentro las situaciones que representan un grafo de procesos - materiales encontramos:

- Los procesos químicos en los cuáles una serie de elementos se transforman en otros componentes, a través de una serie de procesos. Es el caso por ejemplo de la micorremediación, un método de biorremediación, en el cual los materiales están representados por los micelos (parte vegetal de un hongo) y los fertilizantes orgánicos, que se producen por el proceso, representado por la descomposición.
- Los procesos administrativos en una empresa, donde los materiales están representados por los recursos físicos y humanos, y los procesos, las funciones que cumple cada área de la empresa para dar lugar a su material final, que son los servicios o productos prestados por la empresa.

- Las redes complejas en gastronomía, donde los nodos materiales están dados por los ingredientes y los resultados de los nodos procesos, dados por cada uno de los procedimientos culinarios que se llevan a cabo para realizar una receta de cocina.

### 3.3.1. Grafo procesos-materiales Gateau Orange

Es un grafo de procesos - materiales  $R = (V, E, i, f, C)$ , como se muestra en la Figura 3.10 donde  $V$  es el conjunto de vértices de dos tipos:

- Materiales: Dentro de este tipo de vértices se encuentran los ingredientes que hacen parte de la receta, además de los resultados de los procesos culinarios; como se muestra en la siguiente tabla:

	Ingredientes		Productos de los Procesos
1	Ralladura de Naranja	20	Infusión de Leche
2	Leche	21	Batido 1
3	Yemas	22	Geatina Hidratada
4	Jugo de Naranja	23	Batido Horneado
5	Azúcar	24	Merengue Francés
6	Cacao	25	Infusión de Té
7	Polvo de Hornear	26	Batido 2
8	Harina	27	Masa de Chocolate
9	Bicarbonato de Sodio	28	Tamizado
10	Canela Molida	29	Crème Bruleé
11	Vainilla	30	Mousse de Chocolate
12	Aceite	31	Ganache de Leche
13	Limón	32	Gaudeau Orange
14	Crema de Leche		
15	Agua		
16	Gelatina		
17	Huevo		
18	Chocolate Picado		
19	Té		

- Procesos: Es el conjunto de procedimientos culinarios que se llevan a cabo para realizar la receta. Los procesos se muestran en la siguiente tabla:

	Procesos Culinarios
1	Calentar
2	Mezclar 1
3	Mezclar 2
4	Mezclar 3
5	Mezclar 4
6	Mezclar 5
7	Hornear
8	Tamizar
9	Batir 1
10	Batir 2
11	Enfriar
12	Hervir
13	Congelar

$E$ , es el conjunto de aristas, donde hay una arista de un vértice  $v_1$  a un vértice  $v_2$ , si:

- un ingrediente hace parte de un proceso
  
- un proceso produce un nueva preparación

Asumiendo que los vértices de  $R$  estan enumerados como se indico en la tabla anterior,y ordenados por ingredientes, resultados de los procesos y procesos, la matriz de influencias directas  $M$  asociada a  $R$ , y la matriz de influencias directas para procesos y materiales, esta dada por:

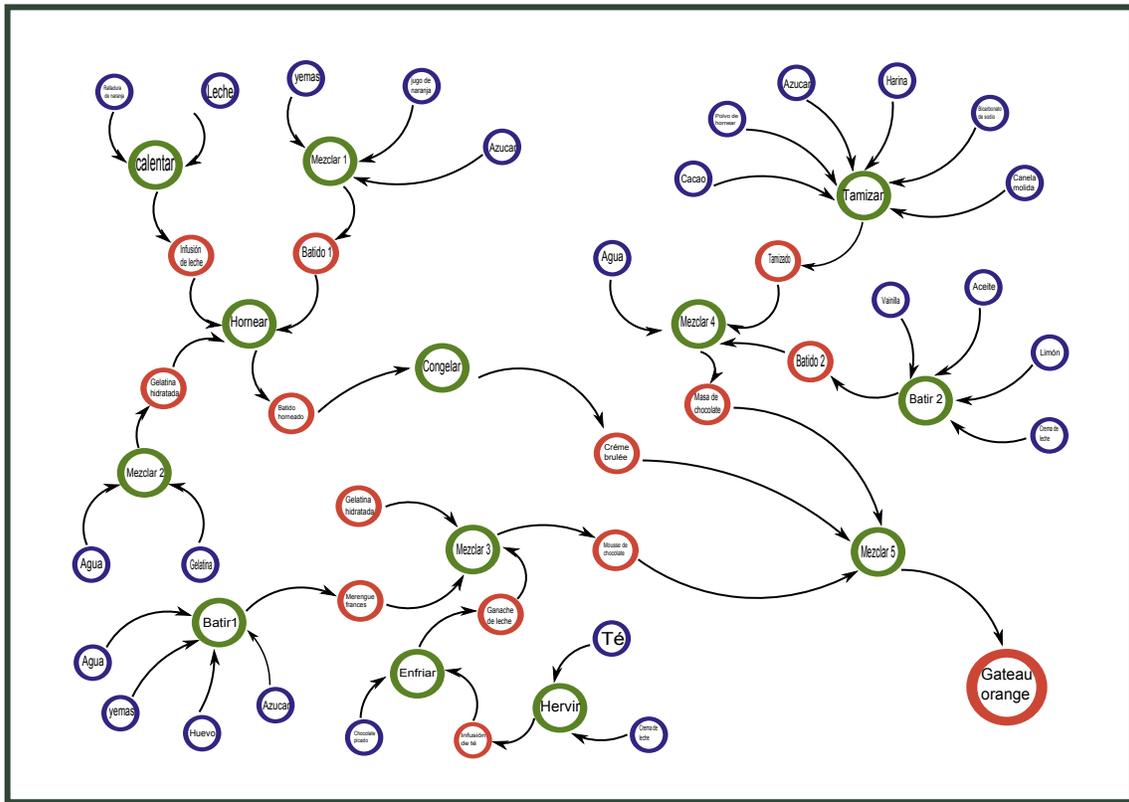


Figura 3.10: Grafo Gateau Orange.







$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de influencias directas para p-p.

Aplicando los métodos para el cálculo de influencias indirectas se obtuvieron los siguientes resultados:

- PWP:

Materiales	Influencias Directas m-m	Influencias Indirectas m-m
Ralladura de naranja	1	0.0276094
Leche	1	0.0276094
Yemas	2	0.0545455
Jugo de Naranja	1	0.0276094
Azúcar	3	0.0814815
Cacao	1	0.0269360
Polvo de hornear	1	0.0269360
Harina	1	0.0269360
Bicarbonato de sodio	1	0.0269360
Canela molida	1	0.0269360
Vainilla	1	0.0269360
Aceite	1	0.0269360
Limón	1	0.0269360
Crema de leche	2	0.0545455
Agua	3	0.0895623
Gelatina	1	0.0383838
Huevo	1	0.0269360
Chocolate picado	1	0.0269360
Té	1	0.0276094
Infusión de leche	1	0.0269360
Batido 1	1	0.0269360
Gelatina Hidratada	2	0.0511785
Batido horneado	1	0.0242424
Merengue francés	1	0.0242424

Materiales	Influencias Directas m-m	Influencias Indirectas m-m
Infusión de té	1	0.0269360
Batido 2	1	0.0242424
Masa de chocolate	1	0.0161616
Tamizado	1	0.0242424
Crème Brulée	1	0.0161616
Mousse de chocolate	1	0.0161616
Ganache de leche	1	0.0242424
Gaudeau Orange	0	0

- Los materiales más influyentes directamente son el agua y el azúcar.
  
- El material que no influye directamente es el Gaudeau Orange.
  
- Los ingredientes más influyentes indirectamente en la receta son el agua, el azúcar y la crema de leche.
  
- Los materiales menos influyentes indirectamente son la masa de chocolate, el crème brulée y el mousse de chocolate.
  
- 18 materiales descendieron de la tabla, entre los cuales se destaca: cacao, polvo de hornear, harina, bicarbonato de sodio, canela molida, vainilla, aceite, limón y masa de chocolate que descendieron 2 lugares.
  
- 5 materiales ascendieron en la tabla, entre los cuales se destaca: la gelatina que ascendió 11 lugares, el té que ascendió 10 lugares y el ganache que ascendió 3 lugares.

Materiales	Dependencias Directas m-m	Dependencias Indirectas m-m
Ralladura de naranja	0	0
Leche	0	0
Yemas	0	0
Jugo de Naranja	0	0
Azucar	0	0
Cacao	0	0
Polvo de hornear	0	0
Harina	0	0
Bicarbonato de sodio	0	0
Canela molida	0	0
Vainilla	0	0
Aceite	0	0
Limón	0	0
Crema de leche	0	0
Agua	0	0
Gelatina	0	0
Huevo	0	0
Chocolate picado	0	0
Té	0	0
Infusión de leche	1	0.0323232
Batido 1	1	0.0484848
Gelatina Hidratada	1	0.0323232
Batido horneado	1	0.1050505
Merengue francés	1	0.0646465

Materiales	Dependencias Directas m-m	Dependencias Indirectas m-m
Infusión de té	1	0.0323232
Batido 2	1	0.0646465
Masa de chocolate	1	0.1292929
Tamizado	1	0.0969697
Crème Brulée	1	0.0592593
Mousse de chocolate	1	0.1185185
Ganache de leche	1	0.0484848
Gaudeau Orange	1	0.1676768

- 13 son los materiales dependientes directamente: infusión de leche, batido 1, gelatina hidratada, batido horneado, merengue francés, infusión de té, batido 2, tamizado, cremé bruléé, masa de chocolate, mousse de chocolate, ganache de leche y gaudeau orange.
- Los ingredientes más dependientes indirectamente en la receta son el Gaudeau Orange, la masa de chocolate y el mousse de chocolate.
- Los materiales menos dependientes indirectamente son la Infusión de leche, la gelatina hidratada y la infusión de té.
- 5 materiales descendieron de la tabla, entre los cuales se destaca: la infusión de leche que descendió 10 lugares y la gelatina hidratada que descendió 9 lugares.
- 6 materiales ascendieron en la tabla, entre los cuales se destaca: gaudeau orange que ascendió 12 lugares, mousse de chocolate que ascendió 8 lugares y masa de chocolate que ascendió 6 lugares.

En cuanto a las influencias indirectas entre procesos, los resultados fueron:

Procesos	Influencias Directas P-P	Influencias Indirectas P-P
Calentar	1	0.0892857
Mezclar 1	1	0.0892857
Mezclar 2	1	0.1696429
Mezclar 3	1	0.0535714
Mezclar 4	1	0.0535714
Mezclar 5	1	0
Hornear	1	0.0803571
Tamizar	1	0.0803571
Batir 1	1	0.0803571
Batir 2	1	0.0803571
Enfriar	1	0.0803571
Hervir	1	0.0892857
Congelar	1	0.0535714

- Todos los procesos son igualmente influyentes directamente.
- El proceso más influyente indirectamente en la receta es Mezclar 2, proceso que mezcla el agua y la gelatina.
- Los procesos menos influyentes indirectamente son Mezclar 3, proceso que mezcla la gelatina hidratada y el merengue francés, Mezclar 4, proceso que mezcla el agua, el tamizado y el batido 2, y Congelar.
- 8 procesos ascendieron en la tabla, entre los que se destaca hervir que ascendió 8 lugares.
- 5 procesos descendieron de la tabla, entre los que se destaca mezclar 5, que descendió 7 lugares.

Procesos	Dependencias Directas P-P	Dependencias Indirectas P-P
Calentar	2	0
Mezclar 1	3	0
Mezclar 2	2	0
Mezclar 3	2	0.1875
Mezclar 4	3	0.1071429
Mezclar 5	3	0.3571429
Hornear	3	0.1607143
Tamizar	6	0
Batir 1	4	0
Batir 2	4	0
Enfriar	2	0.0535714
Hervir	2	0
Congelar	1	0.1339286

- Los procesos más dependientes directamente son tamizar, batir 1 y batir 2.
- El proceso menos dependiente directamente es congelar.
- El proceso más dependiente indirectamente en la receta es Mezclar 5, proceso que mezcla la masa de chocolate, crème brulée y el mousse de chocolate.
- El proceso menos dependiente indirectamente es Enfriar.
- 6 procesos ascendieron en la tabla, entre los que se destacan: congelar que ascendió 9 lugares y mezclar 3, proceso que mezcla la gelatina hidratada y el merengue francés, que ascendió 8 lugares.
- 4 procesos descendieron de la tabla, entre los que se destacan: tamizar, batir 1 y batir 2, que descendieron 9 lugares.

- MICMAC:

Materiales	Influencias Indirectas m-m
Ralladura de naranja	0.0270270
Leche	0.0270270
Yemas	0.0540541
Jugo de Naranja	0.0270270
Azucar	0.0810811
Cacao	0.0270270
Polvo de hornear	0.0270270
Harina	0.0270270
Bicarbonato de sodio	0.0270270
Canela molida	0.0270270
Vainilla	0.0270270
Aceite	0.0270270
Limón	0.0270270
Crema de leche	0.0540541
Agua	0.1081081
Gelatina	0.0540541
Huevo	0.0270270
Chocolate picado	0.0270270
Té	0.0270270
Infusión de leche	0.0270270
Batido 1	0.0270270
Gelatina Hidratada	0.0540541
Batido horneado	0.0270270
Merengue francés	0.0270270

Materiales	Influencias Indirectas m-m
Infusión de té	0.0270270
Batido 2	0.0270270
Masa de chocolate	0
Tamizado	0.0270270
Crème Brulée	0
Mousse de chocolate	0
Ganache de leche	0.0270270
Gauteau Orange	0

- Los ingredientes más influyentes indirectamente en la receta son el agua y el azúcar.

- Los materiales que no influyen indirectamente son la masa de chocolate, el crème brulée, el mousse de chocolate y Gauteau Orange.

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
Ralladura de naranja	0
Leche	0
Yemas	0
Jugo de Naranja	0
Azucar	0
Cacao	0
Polvo de hornear	0
Harina	0
Bicarbonato de sodio	0
Canela molida	0
Vainilla	0
Aceite	0
Limón	0
Crema de leche	0
Agua	0
Gelatina	0
Huevo	0
Chocolate picado	0
Té	0
Infusión de leche	0
Batido 1	0
Gelatina Hidratada	0
Batido horneado	0.1891892
Merengue francés	0

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
Infusión de té	0
Batido 2	0
Masa de chocolate	0.2702703
Tamizado	0
Crème Brulée	0.0810811
Mousse de chocolate	0.2162162
Ganache de leche	0.0540541
Gaudeau Orange	0.1891892

- Los ingredientes más dependientes indirectamente en la receta son la masa de chocolate, el mousse de chocolate, el Gaudeau Orange y el batido horneado.

- Los materiales menos dependientes indirectamente son el ganache de leche y el crème brulée.

Procesos	Influencias Indirectas
Calentar	0.0842105
Mezclar 1	0.0842105
Mezclar 2	0.1315789
Mezclar 3	0.0631579
Mezclar 4	0.0631579
Mezclar 5	0.0315789
Hornear	0.0789474
Tamizar	0.0789474
Batir 1	0.0789474
Batir 2	0.0789474
Enfriar	0.0789474
Hervir	0.0842105
Congelar	0.0631579

- El proceso más influyente indirectamente en la receta es Mezclar 2, proceso que mezcla el agua y la gelatina.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- El proceso menos influyente indirectamente es Mezclar 5, proceso que mezcla la masa de chocolate, crème brulée y el mousse de chocolate.

Procesos	Dependencias Indirectas
Calentar	0.0315789
Mezclar 1	0.0315789
Mezclar 2	0.0315789
Mezclar 3	0.1421053
Mezclar 4	0.0947368
Mezclar 5	0.2421053
Hornear	0.1263158
Tamizar	0.0315789
Batir 1	0.0315789
Batir 2	0.0315789
Enfriar	0.0631579
Hervir	0.0315789
Congelar	0.1105263

- Los procesos más dependientes indirectamente en la receta son es Mezclar 5, proceso que mezcla la masa de chocolate, crème brulée y el mousse de chocolate, Mezclar 3, proceso que mezcla la gelatina hidratada y el merengue fancés y Hornear.
  
- El proceso menos dependiente indirectamente es Enfriar.

- HEAT KERNEL:

Materiales	Influencias Indirectas m-m
Ralladura de naranja	0.0288504
Leche	0.0288504
Yemas	0.0466045
Jugo de Naranja	0.0288504
Azucar	0.0643586
Cacao	0.0284066
Polvo de hornear	0.0284066
Harina	0.0284066
Bicarbonato de sodio	0.0284066
Canela molida	0.0284066
Vainilla	0.0284066
Aceite	0.0284066
Limón	0.0284066
Crema de leche	0.0466045
Agua	0.0696849
Gelatina	0.0359521
Huevo	0.0284066
Chocolate picado	0.0284066
Té	0.0288504
Infusión de leche	0.0284066
Batido 1	0.0284066
Gelatina Hidratada	0.0443853
Batido horneado	0.0266312
Merengue francés	0.0266312

Materiales	Influencias Indirectas m-m
Infusión de té	0.0284066
Batido 2	0.0266312
Masa de chocolate	0.0213049
Tamizado	0.0266312
Crème Brulée	0.0213049
Mousse de chocolate	0.0213049
Ganache de leche	0.0266312
Gateau Orange	0.0106525

- Los ingredientes más influyentes indirectamente en la receta son el agua y el azúcar.

- Los materiales menos influyentes indirectamente son la masa de chocolate, el crème brulée, el mousse de chocolate y Gateau Orange.

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
Ralladura de naranja	0.0106525
Leche	0.0106525
Yemas	0.0106525
Jugo de Naranja	0.0106525
Azucar	0.0106525
Cacao	0.0106525
Polvo de hornear	0.0106525
Harina	0.0106525
Bicarbonato de sodio	0.0106525
Canela molida	0.0106525
Vainilla	0.0106525
Aceite	0.0106525
Limón	0.0106525
Crema de leche	0.0106525
Agua	0.0106525
Gelatina	0.0106525
Huevo	0.0106525
Chocolate picado	0.0106525
Té	0.0106525
Infusión de leche	0.0319574
Batido 1	0.0426099
Gelatina Hidratada	0.0319574
Batido horneado	0.0798935
Merengue francés	0.0532623

Materiales	Dependencias Indirectas m-m
Infusión de té	0.0319574
Batido 2	0.0532623
Masa de chocolate	0.0958722
Tamizado	0.0745672
Crème Brulée	0.0497115
Mousse de chocolate	0.0887705
Ganache de leche	0.0426099
Gaudeau Orange	0.1211718

- Los ingredientes más dependientes indirectamente en la receta son la masa de chocolate, el mousse de chocolate, el Gateau Orange y el batido horneado.

Procesos	Influencias Indirectas
Calentar	0.0842105
Mezclar 1	0.0842105
Mezclar 2	0.1315789
Mezclar 3	0.0631579
Mezclar 4	0.0631579
Mezclar 5	0.0315789
Hornear	0.0789474
Tamizar	0.0789474
Batir 1	0.0789474
Batir 2	0.0789474
Enfriar	0.0789474
Hervir	0.0842105
Congelar	0.0631579

- El proceso más influyente indirectamente en la receta es Mezclar 2, proceso que mezcla el agua y la gelatina.
- El proceso menos influyente indirectamente es Mezclar 5, proceso que mezcla la masa de chocolate, crème brulée y el mousse de chocolate.

Procesos	Dependencias Indirectas
Calentar	0.0315789
Mezclar 1	0.0315789
Mezclar 2	0.0315789
Mezclar 3	0.1421053
Mezclar 4	0.0947368
Mezclar 5	0.2421053
Hornear	0.1263158
Tamizar	0.0315789
Batir 1	0.0315789
Batir 2	0.0315789
Enfriar	0.0631579
Hervir	0.0315789
Congelar	0.1105263

- Los procesos más dependientes indirectamente en la receta son es Mezclar 5, proceso que mezcla la masa de chocolate, crème brulée y el mousse de chocolate, Mezclar 3, proceso que mezcla la gelatina hidratada y el merengue fancés y Hornear.
- El proceso menos dependiente indirectamente es Enfriar.

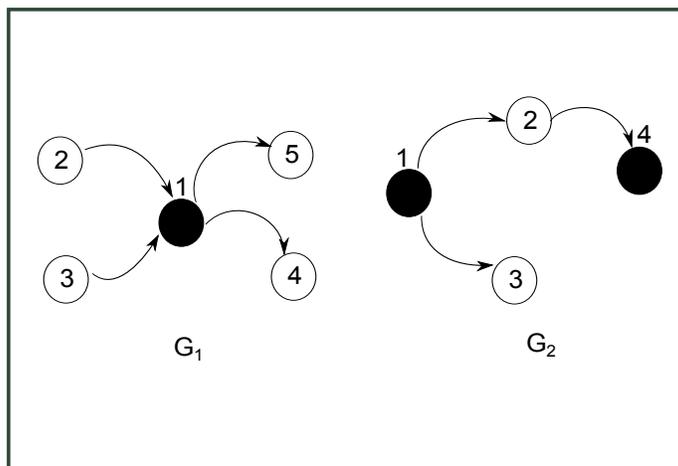


Figura 3.11: Grafos  $G_1$  y  $G_2$ .

### 3.4. Operaciones entre grafos Procesos-Materiales

**3.4.1 Definición** (Unión de grafos procesos materiales). Sea  $G_1 = (V_1, E_1, i_1, f_1, C_1)$  Y  $G_2 = (V_2, E_2, i_2, f_2, C_2)$  dos grafos procesos - materiales. La unión de  $G_1$  y  $G_2$ , denotada  $G_1 \sqcup G_2$ , es  $G_3 = (V_3, E_3, i_3, f_3, C_3)$  donde:  $V_3 = V_1 \sqcup V_2$  y  $E_3 = E_1 \sqcup E_2$ .

**3.4.2 Ejemplo.** Sea  $G_1$  y  $G_2$  dos grafos procesos-materiales con  $V_1 = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $V_2 = 1, 2, 3, 4$ ,  $G_1 \sqcup G_2 = G_3$ , donde  $V_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ . La unión se muestra en la Figura 3.11 y 3.12.

**3.4.3 Definición** (Producto de grafos procesos - materiales). Sea  $G_1 = (V_1, E_1, i_1, f_1, C_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2, i_2, f_2, C_2)$  dos grafos procesos-materiales. El producto ente  $G_1$  y  $G_2$ , denotado  $G_1 \otimes G_2$ , es  $G_3 = (V_3, E_3, i_3, f_3, C_3)$ , donde:  $V_3 \subseteq V(G_1) \times V(G_2)$ , donde  $(a, b) \in V_3$  si y sólo si  $C(a) = C(b)$ . Una arista  $e \in E_3$  de  $(u_1, u_2)$  a  $(v_1, v_2) \in V_3$  consiste en un par de aristas  $e_1$  de  $u_1$  a  $v_1$  y  $e_2$  de  $u_2$  a  $v_2$ .

**3.4.4 Ejemplo.** Sea  $G_1$  Y  $G_2$  dos grafos procesos - materiales con  $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $V_2 = \{5, 6, 7, 8\}$ ,  $G_1 \otimes G_2 = G_3$ . El producto se muestra en la Figura 3.13 y 3.14.

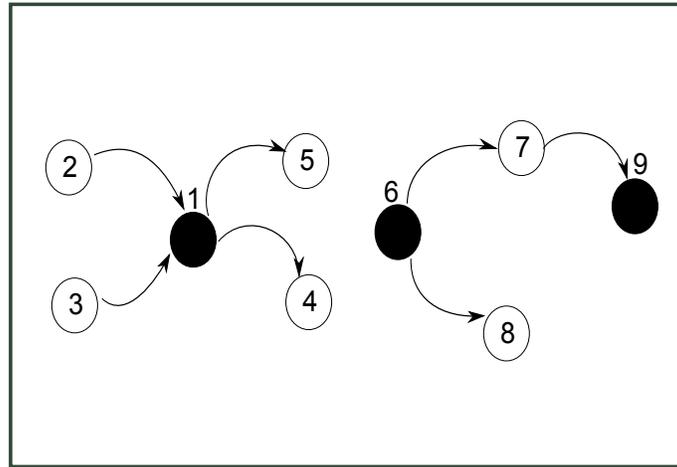


Figura 3.12:  $G_1 \sqcup G_2$ .

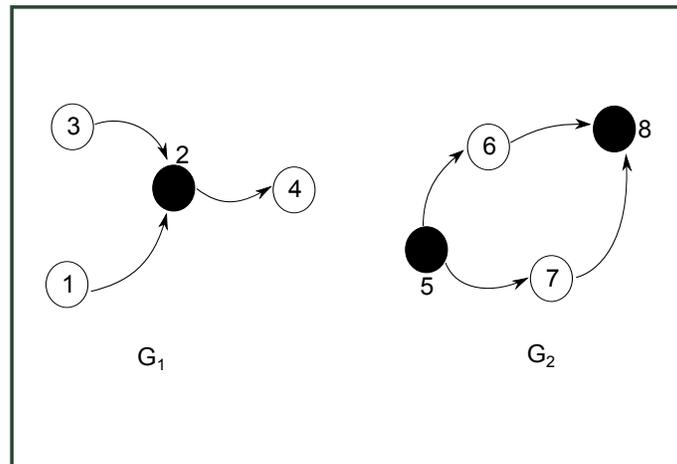


Figura 3.13: Grafos  $G_1$  Y  $G_2$

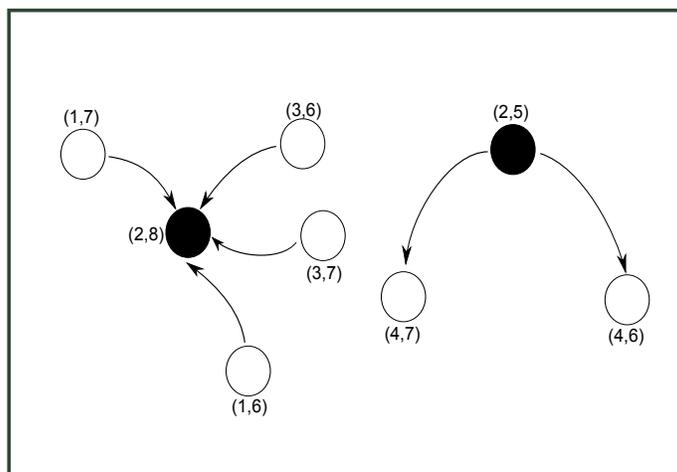


Figura 3.14:  $G_1 \otimes G_2$ .

**3.4.5 Definición** (Grafo Cociente). Sea  $G = (V, E, i, f, C)$  un grafo procesos-materiales y  $\pi$  una partición adecuada de  $V$ . El grafo cociente se define como

$G_{/\pi} = (V_{/\pi}, E_{/\pi}, i_{/\pi}, f_{/\pi}, C_{/\pi})$ , donde:

- $V_{/\pi}$  es el conjunto de bloques de la partición  $\pi$ , es decir,  $V_{/\pi} = \pi$ , y donde para cada  $A \in \pi$ , tenemos que  $C(A) = C(\partial A)$
- $E_{/\pi}$  es el conjunto de aristas. Hay una arista  $e_{/\pi}$  en  $E_{/\pi}$  entre bloques,  $A$  a  $B$ , si hay una arista  $e \in E$ , tal que  $e = (a, b)$ , para  $a \in A$  y  $b \in B$ .

$(i_{/\pi}, f_{/\pi})$  y  $C_{/\pi}$  se definen de forma natural.

**3.4.6 Observación.** Si  $G$  es un grafo procesos - materiales con peso es decir,

$$G = (V, E, i, f, C, w), \quad w(e_{/\pi}) = \sum_{i(e) \in A; f(e) \in B} w(e)$$

**3.4.7 Ejemplo.** Sea  $G$  el grafo procesos - materiales que se muestra en la Figura ??

con  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$

$12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38,$

$39, 40, 41, 42, 43, 44\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18},$

$e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{37}, e_{38}, e_{39}, e_{40}, e_{41},$   
 $e_{42}, e_{43}, e_{44}, e_{45}, e_{46}, e_{47}, e_{48}, e_{49}\}, (i, f)(e_1) = (1, 3), (i, f)(e_2) = (3, 2), (i, f)(e_3) = (3, 5),$   
 $(i, f)(e_4) = (4, 3), (i, f)(e_5) = (5, 9), (i, f)(e_6) = (9, 10), (i, f)(e_7) = (8, 10), (i, f)(e_8) =$   
 $(5, 8), (i, f)(e_9) = (5, 7), (i, f)(e_{10}) = (5, 6), (i, f)(e_{11}) = (12, 6), (i, f)(e_{12}) = (7, 11),$   
 $(i, f)(e_{13}) = (12, 13), (i, f)(e_{14}) = (11, 15), (i, f)(e_{15}) = (15, 14), (i, f)(e_{16}) = (13, 14),$   
 $(i, f)(e_{17}) = (11, 16), (i, f)(e_{18}) = (16, 14), (i, f)(e_{19}) = (14, 18), (i, f)(e_{20}) = (14, 19),$   
 $(i, f)(e_{21}) = (19, 20), (i, f)(e_{22}) = (20, 27), (i, f)(e_{23}) = (19, 21), (i, f)(e_{24}) = (21, 27),$   
 $(i, f)(e_{25}) = (18, 21), (i, f)(e_{26}) = (18, 22), (i, f)(e_{27}) = (21, 24), (i, f)(e_{28}) = (22, 23),$   
 $(i, f)(e_{29}) = (24, 25), (i, f)(e_{30}) = (25, 26), (i, f)(e_{31}) = (28, 29), (i, f)(e_{32}) = (30, 32),$   
 $(i, f)(e_{33}) = (29, 30), (i, f)(e_{34}) = (29, 31), (i, f)(e_{35}) = (28, 33), (i, f)(e_{36}) = (28, 34),$   
 $(i, f)(e_{37}) = (33, 40), (i, f)(e_{38}) = (33, 27), (i, f)(e_{39}) = (34, 35), (i, f)(e_{40}) = (34, 37),$   
 $(i, f)(e_{41}) = (37, 38), (i, f)(e_{42}) = (38, 42), (i, f)(e_{43}) = (35, 36), (i, f)(e_{44}) = (36, 40),$   
 $(i, f)(e_{45}) = (36, 39), (i, f)(e_{46}) = (40, 41), (i, f)(e_{47}) = (39, 41), (i, f)(e_{48}) = (42, 43),$   
 $(i, f)(e_{49}) = (43, 44), (i, f)(e_{50}) = (26, 41), (i, f)(e_{51}) = (10, 28).$

La representación gráfica de la partición  $\pi$  de  $V$  se muestra en la Figura 3.16

Tomando  $\pi = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  se tiene que  $V/\pi = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, E/\pi = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\},$   
 $(i/\pi, f/\pi)(t_1) = (B_1, B_2), (i/\pi, f/\pi)(t_2) = (B_1, B_3), (i/\pi, f/\pi)(t_3) = (B_4, B_2), (i/\pi, f/\pi)(t_4) =$   
 $(B_2, B_4), (i/\pi, f/\pi)(t_5) = (B_3, B_4).$

La representación gráfica de  $G/\pi$  se muestra en la Figura 3.17

## 3.5. Conteo de Grafos Procesos - Materiales

**3.5.1 Teorema.** *Sea  $p = \{p_1, p_2, p_3 \dots p_n\}$  un conjunto de procesos y  $m = \{m_1, m_2, m_3 \dots m_r\}$  un conjunto de materiales, el número de grafos procesos - materiales que se pueden construir con  $p$  procesos y  $m$  materiales, esta dado por:*

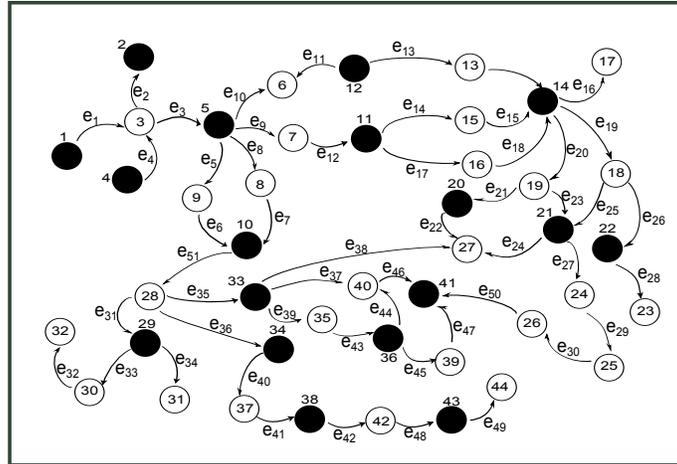


Figura 3.15: Grafo Procesos - Materiales.

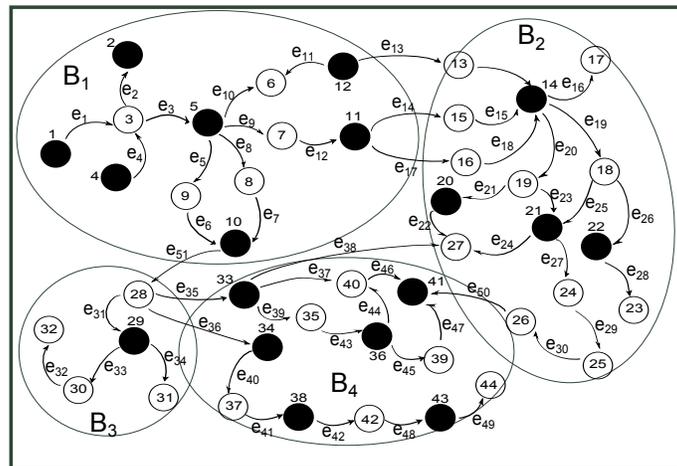


Figura 3.16: Particion  $\pi$ .

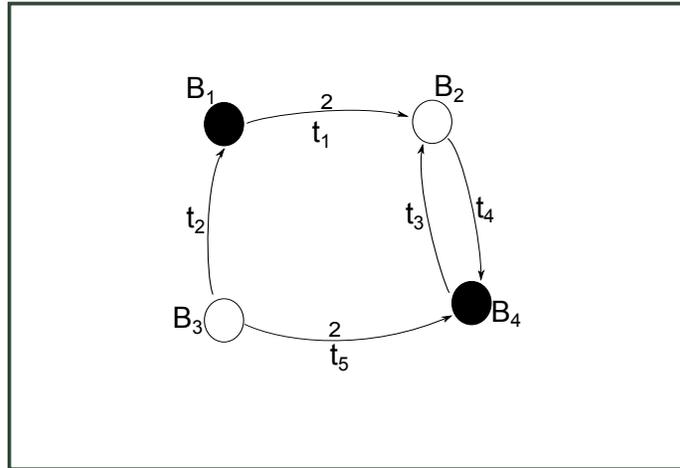


Figura 3.17: Grafo cociente  $G/\pi$ .

$$2^{pm} \cdot 2^{mp} = 2^{2mp}$$

como se muestra en los esquemas de la Figura 3.18

**3.5.2 Teorema.** Sea  $p = \{p_1, p_2, p_3 \dots p_n\}$  un conjunto de procesos y  $m = \{m_1, m_2, m_3 \dots m_r\}$  un conjunto de materiales, el número de grafos procesos - materiales que se pueden construir con  $p$  procesos y  $m$  materiales, de manera que no hay vértices aislados, es decir, cada procesos produce algún material y cada material participa en algún proceso esta dado por:

el número de procesos es  $(2^p - 1) \dots (2^p - 1) = (2^p - 1)^m$

el número de materiales es  $(2^m - 1) \dots (2^m - 1) = (2^m - 1)^p$

luego el número de grafos procesos - materiales es:  $(2^p - 1)^m (2^m - 1)^p$

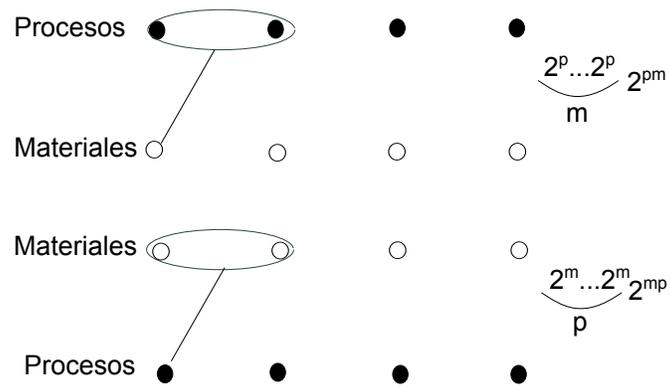


Figura 3.18:

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## CONCLUSIONES, APORTES Y ALCANCES

### 4.1. Respecto a los objetivos específicos

- Se Definió un grafo de procesos-materiales para la aplicación de los algoritmos de influencias indirectas como el algoritmo PWP, a través de la construcción de ejemplos teóricos de grafos de procesos-materiales, y del análisis de algunas redes reales en las cuales existen influencias entre procesos y materiales.
- Se aplicaron los algoritmos de influencias indirectas como PWP a redes reales y se analizarón los vectores de dependencia e influencia indirecta.
- Se mostraron los avances en la investigación en el seminario de redes complejas

de la Universidad Sergio Arboleda, donde se logro obtener sugerencias y aportes para el desarrollo del trabajo. Además se participó en el primer seminario de matemática aplicada de la Universidad de Cundinamarca, mostrando un estudio sobre redes de regulación genetica.

## **4.2. Respecto al objetivo general**

Se generaron las redes procesos-procesos y materiales-materiales, disminuyendo el cálculo computacional y facilitando la interpretación de información, a través de la red procesos-materiales, y obteniendo información, a partir del cálculo de influencias indirectas en las interacciones especificas procesos-procesos y materiales-materiales, no evidente en las influencias directas entre éste tipo de interacciones.

## **4.3. Respecto a la hipótesis de investigación**

Se pueden estudiar y caracterizar los vértices de una red procesos-materiales, a través de la construcción de redes individuales de procesos y materiales, y obtener de esta manera información relevante respecto a las influencias indirectas entre éstos, extrayendo información que no es evidente a partir de las influencias directas.

## **4.4. Aportes**

### **4.4.1. Matemático**

Se logro un aporte en la teoria de redes complejas a través de la construcción de la definición de un tipo especial de redes en la cual interactuan diferentes procesos por

medio de materiales, alcanzando de esta manera un nuevo punto de vista para el análisis de grafos de este tipo, a partir de sus influencias indirectas entre procesos-procesos y materiales-materiales.

## 4.5. Alcances

### 4.5.1. Matemático

- Introducción de la definición de las redes procesos-materiales, y de las influencias indirectas en este tipo de redes.
- Presentación de una herramienta que puede contribuir a disminuir costos y a mejorar la organización en gastronomía.
- Definición de las operaciones en grafos de procesos-materiales, así como los algoritmos para el conteo de este tipo de redes.

### 4.5.2. Preguntas Abiertas

Esta investigación representa una aproximación al estudio de redes procesos-materiales, desde el punto de vista de las influencias indirectas que existen entre los vértices procesos y los vértices materiales entre sí, para de esta manera llevar a contribuir en la toma de decisiones en sistemas que involucran éste tipo de interacciones. Quedan abiertas las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo construir una red de procesos-materiales en el ámbito de la educación?, ¿quienes representarían los nodos procesos y quienes los nodos materiales?

2. ¿Cuántos grafos procesos-materiales se pueden construir, dado un conjunto de procesos y un conjunto de materiales, de manera que existan procesos que no requieran de mtaeriales?
3. ¿Que método para el cálculo de influencias indirectas resulta más eficiente en la palicación a grafos de procesos-materiales?
4. ¿Que sugerencias cuantitativas específicas se podrían formular a partir del cálculo de influencias indirectas en redes procesos-materiales aplicadas a casos reales?

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Maximino Aldana. Redes complejas. *Recuperado a partir de <http://www.fis.unam.mx/~max/English/notasredes.pdf>*, 2006.
- [2] Maximino Aldana, Enrique Balleza, Stuart Kauffman, and Osbaldo Resendiz. Robustness and evolvability in genetic regulatory networks. *Journal of theoretical biology*, 245(3):433–448, 2007.
- [3] Manuel Castells. Afterword: Why networks matter. *Demos Collection*, pages 219–225, 2004.
- [4] Peter Csermely, Tamás Korcsmáros, Huba JM Kiss, Gábor London, and Ruth Nusinov. Structure and dynamics of molecular networks: A novel paradigm of drug discovery: A comprehensive review. *Pharmacology & therapeutics*, 138(3):333–408, 2013.
- [5] Jorge Catumba Díaz, Rafael y Ruiz. Cálculo de influencias indirectas en scilab.
- [6] Rafael Díaz. influencias indirectas. *arXiv: 0906.1610*, 2009.

- [7] Ferenc Friedler, LT Fan, and Balázs Imreh. Process network synthesis: problem definition. *Networks*, 31(2):119–124, 1998.
- [8] Laura Gomez. Importancia de las matemáticas en la universidad sergio arboleda. *Recuperado a partir de <http://www.fis.unam.mx/~max/English/notasredes.pdf>*, 2012.
- [9] Mark EJ Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, 45(2):167–256, 2003.
- [10] Javier Ozón Górriz et al. *Contribución al coloreado de grafos y las redes pequeño-mundo*. Universitat Politècnica de Catalunya, 2001.
- [11] L Papp, S Bumble, F Friedler, and LT Fan. Characteristics of molecular-biological systems and process-network synthesis. *arXiv preprint physics/0203024*, 2002.
- [12] József Tick. P-graph-based workflow modelling. *Acta Polytechnica Hungarica*, 4(1):75–88, 2007.
- [13] Rebecca S Wills. Google’s pagerank. *The Mathematical Intelligencer*, 28(4):6–11, 2006.
- [14] Jing Zhao, Hong Yu, Jianhua Luo, ZW Cao, and Yixue Li. Complex networks theory for analyzing metabolic networks. *Chinese Science Bulletin*, 51(13):1529–1537, 2006.