

**DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DEL
NÚMERO RACIONAL COMO FRACCIÓN MEDIANTE LA MÚSICA PARA
ESTUDIANTES DE GRADO QUINTO CON DIFICULTADES EN LAS
HABILIDADES DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y SIMBÓLICA.**

JUANITA DEL MAR RAMÍREZ WEAVER
ANGÉLICA MARÍA SALCEDO CORTÉS

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN DIRIGIDO POR
MARTHA HORTENSIA ARANA ERCILLA

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
MARZO, 2024

Enseñanza del número racional como fracción mediante la música	2
--	---

Tabla de contenido

Resumen	4
Introducción	5
Capítulo I	8
Situación Problema	8
Estado Del Arte	9
Pregunta Problema	24
Justificación de la Pregunta	24
Objetivos	26
<i>Objetivo General</i>	26
<i>Objetivos Específicos</i>	26
Supuesto	26
Capítulo II	28
Marco Teórico-Conceptual	28
Posicionamiento Teórico	28
<i>Constructivismo en Educación Matemática</i>	29
<i>Teoría Socio constructivista</i>	29
<i>Teoría de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)</i>	29
<i>Pedagogía cognitiva y conceptual</i>	30
Conceptos	30
<i>Número Racional como Fracción</i>	30
<i>Música como Herramienta Pedagógica</i>	31
<i>Secuencia Didáctica</i>	32
<i>Relación Música y Matemáticas</i>	32
Capítulo III	36
Marco Metodológico	36
Paradigma	40
Enfoque	40
Tipo de Investigación	42
<i>Estrategias de investigación</i>	44
<i>Investigación documental</i>	44
<i>Técnica de análisis de contenido</i>	44
Evaluaciones/Test Diagnóstico	48
Fases y procedimientos	51

Enseñanza del número racional como fracción mediante la música	3
Capítulo IV	53
4.1 Resultados y Análisis	53
4.1.1. <i>Objetivo I</i>	53
4.1.2. <i>Objetivo II</i>	79
4.1.3. <i>Objetivo III</i>	97
<i>Integración Curricular</i>	104
<i>Evaluación Formativa</i>	105
Capítulo V	111
Conclusiones	111
Recomendaciones	112
Referencias	119
Anexos	¡Error! Marcador no definido.
Anexo 1: Cronograma	¡Error! Marcador no definido.
Anexo 2: Revisión documental	¡Error! Marcador no definido.
Anexo 3: Test diagnóstico	115
Anexo 4: Test de representación	¡Error! Marcador no definido.
Anexo 5: Test resueltos	¡Error! Marcador no definido.

Resumen

La enseñanza de las matemáticas no solo abarca la necesidad de dar a conocer un objeto matemático y, que los estudiantes lo interioricen mediante planteamientos de problemas, sino que debe contener soluciones a diferentes dificultades que pueden tener los estudiantes, a la hora de aprender dichos objetos. En esta investigación se tiene en cuenta la enseñanza del número racional como fracción, siendo un objeto matemático que presenta múltiples dificultades a la hora de ser objeto de estudio de los estudiantes, respecto a la representación gráfica y simbólica. Es por ello que, este proyecto de investigación busca diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del número racional como fracción, mediante la música, destinada sobre todo a estudiantes con las dificultades mencionadas.

Esto, además, apoya no solo el aprendizaje del número racional en sí, también la motivación en el aula y el proceso enseñanza-aprendizaje generado tanto con estudiantes “regulares” como con estudiantes con las dificultades expuestas.

Introducción

Enseñar matemáticas ha venido convirtiéndose en un desafío para los docentes que se hacen cargo de dicha disciplina, lo cual se evidencia tanto en el aula de clase como fuera de ella, pues no solo necesitan lograr la atención de los estudiantes, también mejorar herramientas que estimulen el deseo de aprender en ellos (Font, 1994). De hecho, al implementar nuevas estrategias para mejorar el aprendizaje de los estudiantes, se hace evidente la necesidad de no solo realizar actividades que permitan el crecimiento formativo de los objetos matemáticos que se desean enseñar, sino que se precisa que dichas estrategias innovadoras cautiven la atención de los estudiantes y por consiguiente su deseo de aprender y que estimulen así mismo su afán por investigar acerca de la disciplina en cuestión.

Para Rico (1995) uno de los problemas al enseñar matemáticas es que, aunque los docentes no resalten las falencias de los estudiantes en la realización de ejercicios o a la hora de presentar sus resultados, los estudiantes continúan manifestando temor al error y a exponer ideas que los demás puedan ver como equivocadas. Dichos temores se hacen presentes en el aula de clase cuando se manifiestan inquietudes, pues en su mayoría prefieren continuar con diferentes maneras que creerán correctas, para solucionar el ejercicio o simplemente pierden el interés al notar que no es la respuesta deseada, tal pérdida de interés se fundamenta también en el temor al error y se evidencia igualmente en resultados de exámenes estatales (Chávez, 2008).

En el colegio Summerhill Schooll de Cota se enfatiza la necesidad de sacar estudiantes que tengan tanto los conocimientos académicos como la capacidad para utilizar dichos conocimientos en la vida laboral y cotidiana. En el caso particular de las

matemáticas y los números racionales, los estudiantes deben de tener claridad conceptual y la habilidad de utilizar distintos tipos de representaciones gráficas y simbólicas, puesto que los problemas cotidianos los requieren; a la hora de repartir alimentos, revisar cuentas y sacar porcentajes.

La enseñanza de las matemáticas requiere que el docente cuente con herramientas pedagógicas fundamentales, mediante las cuales los estudiantes adquieran la confianza necesaria para sentir un respaldo en la adquisición de conocimiento. Dichas herramientas deben estar acompañadas de conocimientos claros en los objetos que se pretenden dar a conocer. Los estudiantes en repetidas ocasiones cuentan con el concepto base del objeto; sin embargo, al adentrarse en la práctica a resolver los distintos ejercicios, es donde se encuentran con obstáculos frente a los que suelen detenerse; es entonces cuando el docente debe apoyar y brindar acompañamiento continuo, que permita a los estudiantes continuar con el proceso a pesar de los posibles errores que llegasen a tener.

Uno de estos obstáculos es la representación, para Duval (2004) que los estudiantes aprendan matemáticas correctamente, permite el análisis de procesos cognitivos, tales como la conceptualización, resolución de problema, pensamiento crítico, comprensión de textos, que son fundamentales para la vida diaria y futura de los estudiantes. Todas ellas basadas en el buen manejo de la representación de los objetos matemáticos que sean foco de estudio, en este caso el número racional.

Para poder solucionar ese reto educativo, se hace necesaria la creación de una secuencia didáctica donde se trabajen estrategias para que los estudiantes puedan entender, comprender y aplicar a la realidad las fracciones gráfica o simbólicamente. También es necesario indagar en las investigaciones ya realizadas en el tema para justificar

teóricamente dicha secuencia didáctica y confirmar que los estudiantes poseen efectivamente esos problemas de representación.

Con esta investigación, se pretende guiar el aprendizaje de los estudiantes de tal manera que se fortalezcan competencias como razonamiento, argumentación, comunicación y sobre todo modelación de procesos y fenómenos de la realidad que expliquen el objeto matemático en cuestión a partir de elementos musicales.

Para esto es necesario investigar las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de aprender los números racionales y su representación gráfica y simbólica, y plantear una secuencia didáctica que proponga una solución a los problemas encontrados utilizando la música.

Capítulo I

Situación Problema

En el Colegio Summerhill School ubicado en Cota, Colombia las investigadoras evidencian la necesidad de encontrar estrategias didácticas para la enseñanza de las fracciones, que solucionen las dificultades que tienen los estudiantes a la hora de representar gráfica y simbólicamente los números racionales. Al observar el currículo en matemáticas del colegio, donde los números racionales son el tema central de los grados cuarto, quinto, sexto y séptimo, es imperativo resolver y trabajar esta dificultad en el grado quinto, ya que los estudiantes tienen una noción básica de los números racionales y desde esa base teórica, se empiezan a construir conocimientos que impactarán toda su vida estudiantil.

Teniendo en cuenta la misión del Colegio, la cual es formar estudiantes líderes con valores, felices y exitosos en todos los ámbitos de su vida. Se busca desarrollar altas competencias en diferentes idiomas para que los estudiantes puedan interactuar efectivamente en un mundo globalizado. Esto se logra a través de la promoción de la autonomía, el respeto, la honestidad y el compromiso. Dado que el perfil del estudiante Summerhillista se caracteriza por equilibrar la fortaleza de espíritu y la sensibilidad humana, contar con un excelente nivel académico, asumir una gran responsabilidad social, tener una capacidad de liderazgo destacada y, apropiarse profundamente de los valores institucionales, siendo esencial abordar las dificultades en la enseñanza de las fracciones para garantizar la consistencia y excelencia académica, desde su base otorgándole así a cada estudiante las herramientas necesarias para abordar, enfrentar y superar este tópico.

La resolución de las dificultades en la enseñanza de las fracciones contribuirá directamente a alcanzar la visión de la institución, siendo esta que para el año 2026 el Colegio Summerhill School se consolide como un referente de calidad académica y humana. Formando líderes transformacionales e innovadores con una visión global. Ya que la excelencia académica en matemáticas es fundamental para la formación de líderes con una comprensión profunda y versátil del mundo que los rodea.

Estado Del Arte

A partir del planteamiento de un problema raíz a la hora de enseñar un objeto matemático, se hace necesario verificar si lo que se pretende es minimizar errores cometidos por los estudiantes, o al menos que dichos errores no afecten el estudio del objeto en sí. De esta manera, es más llevadero que el estudiante establezca juicios lógicos que le permitan desarrollar procesos cognitivos acordes al objeto matemático que desea aprender. En este trabajo se tratará del número racional como objeto matemático, así pues, para que dichos juicios lógicos se puedan generar en los estudiantes a la hora de hablar del número racional, es necesario que se genere un buen manejo de la representación. De no ser así, el estudiante tropezará con obstáculos que de igual manera necesitarán de la mejora del aprendizaje para su culminación.

Como se evidenció en el primer apartado, el problema planteado es enseñar el número racional a estudiantes con dificultades en la representación, esto se hará mediante la música, siguiente objeto base de esta investigación. Por eso, es necesario estudiar y considerar el desarrollo epistemológico desde las investigaciones realizadas, que conlleve al estudio de dicho problema. Se tendrán en cuenta para determinar dichos procesos las siguientes categorías pedagógicas de análisis, tales como la secuencia didáctica propuesta

para abordar las dificultades en la representación gráfica y simbólica del número racional fraccionario, utilizando la música como herramienta pedagógica.

Tabla 1

Análisis descriptivo del estado del arte

NIVEL	CATEGORÍA	NÚMERO DE PUBLICACIONES ENCONTRADAS
LOCAL	DIDÁCTICA DEL NÚMERO RACIONAL	5
	DIDÁCTICA MEDIANTE LA MÚSICA	0
	PROBLEMAS DEL APRENDIZAJE	1
	RELACIÓN MÚSICA Y MATEMÁTICAS	3
LATINOAMÉRICA	DIDÁCTICA DEL NÚMERO RACIONAL	5
	DIDÁCTICA MEDIANTE LA MÚSICA	2
	PROBLEMAS DEL APRENDIZAJE	3
	RELACIÓN MÚSICA Y MATEMÁTICAS	6
INTERNACIONAL	DIDÁCTICA DEL NÚMERO RACIONAL	11
	DIDÁCTICA MEDIANTE LA MÚSICA	6
	PROBLEMAS DEL APRENDIZAJE	5
	RELACIÓN MÚSICA Y MATEMÁTICAS	15

Nota. Esta tabla hace un análisis descriptivo de las publicaciones y documentos encontrados a nivel Local, Latinoamérica e internacional de cada una de las categorías propuestas.

En consecuencia, esta investigación se basó en un análisis documental de artículos de revistas indexadas (estudio) a nivel internacional, latinoamericano y local para la

realización del estado del arte, en dicha investigación se hace referencia a 62 producciones científicas concernientes a las categorías de análisis previamente mencionadas en la Tabla 1.

Este análisis se realizó a través de la metodología de convergencias y divergencias desarrollada por Rodríguez (2018). Con esto, se evidenció lo siguiente:

Al evaluar la primera categoría de análisis de la didáctica del número racional se puede evidenciar que Beyranevand (2014) enseña las diferentes representaciones que tienen los números racionales en donde se pueden formular las dificultades que puede tener el estudio de este objeto matemático, sin embargo, por su parte DeWolf, Chiang, Bassok, Holyoak, & Monti (2016) evidencian cómo el sistema cognitivo representa como tal el número racional a partir de las interacciones que aparecen en los esquemas de pensamiento de los estudiantes.

En compensación, Niemi (1996) menciona que el nivel de conocimiento en la representación de números racionales predice el desempeño en tareas de resolución de problemas, justificación y explicación del mismo objeto. Esto lo explica mejor Moseley & Okamoto (2008) quienes sugieren por medio de su investigación que los estudiantes cuyas representaciones de números racionales vinculadas de manera más efectiva a la resolución de problemas, son quienes obtienen puntuaciones significativamente más altas en sus desempeños.

Además de eso, Obando (2003) determinó que la manera en que se está llevando a cabo la enseñanza del número racional en los colegios, genera conceptualizaciones erróneas en los estudiantes, por lo que es necesario construir procesos que hagan en el estudiante el

aprendizaje más significativo. Es por esto que González González, López Tamayo, & Bello Rodríguez (2019) ofrecen un estudio en el que sugieren metodologías innovadoras para que los maestros logren resolver, al menos de manera parcial, las insuficiencias detectadas en los estudiantes a la hora de estudiar los fraccionarios.

Por otro lado, González, Bello Rodríguez, & Santiesteban Almaguer (2019) brindan un modelo didáctico que permite desarrollar el cálculo de números fraccionarios, de esta manera se hace más evidente las relaciones existentes entre el sistema de conocimiento y la didáctica empleada. Además de ello, Sánchez, (2012) desarrolla una propuesta que permita enseñar la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa, todos ellos dentro del conjunto de números racionales. Por su parte, Gairín (2001) mediante su investigación, concluye que si el maestro comprende el modelo que desea enseñar, le será más fácil evidenciar los posibles errores de los estudiantes, pues de lo contrario pueden llegar a validar como correctas, respuestas que sean equivocadas para el problema planteado, donde es de suma importancia el lenguaje simbólico que se esté presentando a los estudiantes.

Es por esto, que Escolano & Gairín (2005) mencionan que no se debe hacer prioritaria la enseñanza de la fracción como relación parte-todo, pues esto puede generar obstáculos futuros en la adquisición de dicho objeto matemático en los estudiantes, más bien, se debe dar a conocer la representación del número racional como medida, cociente y razón. Por otra parte, Eulogio Chanca & Ramos Huamán (2019) mencionan que, aunque los estudiantes logran aprendizajes exitosos en cuanto a la representación mediante el lenguaje natural y lenguaje aritmético de los números racionales, se les dificulta el proceso de conversión, por lo que es necesario continuar abarcando el desarrollo de la representación.

En consecuencia, Rojas (2017) propone una metodología de enseñanza de los números racionales abarcando los diferentes registros de representación, para ello se basa en la elaboración de un pre-test y pos-test que le permitieron evaluar el avance en la adquisición de dicho objeto matemático en los estudiantes. En conclusión, para Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992 (1992) el aprendizaje de los conceptos relacionados con el número racional es un obstáculo para el desarrollo lógico matemático de los estudiantes, pues éstos tienden a generar diversas representaciones, en su mayoría erróneas de cómo se simboliza realmente este objeto matemático, por lo que lo importante es entonces, describir a profundidad las diferentes perspectivas que pueden tomar los estudiantes y evaluarlas para de esta manera lograr enfocar soluciones a cada una de ellas.

Además de esto, es fundamental mencionar como se referencia el objeto del número racional en los estándares, basados en una coherencia vertical, se tendrá en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica, unidades apropiadas para diferentes mediciones. Según los estándares definidos por el MEN, los estudiantes al finalizar grado quinto deben: Interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. Este proyecto se focaliza en las fracciones tanto en contextos de medición como relaciones parte todo.

En el currículo del grado quinto se espera que los estudiantes consoliden sus comprensiones sobre los números naturales y las fracciones (en sus representaciones de fraccionario y decimal y sus relaciones con expresiones en porcentajes) con sus operaciones (suma, resta, multiplicación y división) y relaciones (mayor que, menor que, igual a, ser múltiplo y ser divisor de). Así mismo, establezcan formas para calcular resultados de

operaciones con fracciones. Este proyecto se encamina en la comprensión de fraccionarios y su identificación como relación parte todo.

En las evidencias de aprendizaje, se espera que el estudiante de grado quinto interprete la relación parte – todo y la represente por medio de fracciones, razones o cocientes, interprete y utilice números naturales y racionales (fraccionarios) asociados con un contexto para solucionar problemas, determine las operaciones suficientes y necesarias para solucionar diferentes tipos de problemas y resuelva problemas que requieran reconocer un patrón de medida asociado a un número natural o a un racional (fraccionario). En este proyecto se ahondará en la interpretación que los estudiantes hacen de la relación parte – todo y la representen por medio de fracciones.

Bajo el contexto musical, los números fraccionarios se llevarán a cabo mediante elementos musicales como las figuras, a través del uso del pentagrama y construcción de compases.

Frente a la categoría de didáctica de la música es importante destacar que la investigación la usa como herramienta de aprendizaje mediante sus elementos, es decir, emplea dichos elementos para abordar el número racional como fracción y no melodías como base de aprendizaje con motivación. Podemos notar que, para Álvarez, y otros, (2016), la música es un elemento fundamental para la educación en básica primaria además de ser herramienta global para el aprendizaje, también mencionan que la música es un componente base para docentes, pues brinda una educación integral en los estudiantes.

Esto mismo se evidencia en la investigación de Nunes (2020), pues a través de dicha investigación verifica que el uso de la música en procesos didáctico-pedagógicos

repercute tanto en el docente como en los estudiantes, concluyendo así que la música se ha utilizado como herramienta de enseñanza en diferentes niveles de educación pues además de brindar facilidad a los docentes, también motiva a los estudiantes y su aprendizaje; de igual manera Vilar (2010) menciona que los estudiantes muestran más interés en la utilidad inmediata que pueden obtener al aplicar la música en sus contenidos, lo que conlleva a que el interés se incremente y por ello también, se mejore el aprendizaje de lo que se pretende enseñar mediante la música.

Por su parte, Velazco Reyes, Calsina Ponce, Valdivia Terrazas, & Ruelas Vargas, (2020) enseñan tres métodos de retención de conceptos mediante secuencias rítmicas, entonadas y habladas, que facilitan el aprendizaje en los estudiantes, mediante su investigación concluyeron que el grado de retención es mucho mayor en estudiantes a quienes se aplicaron dichos métodos a través de las secuencias mencionadas.

De igual manera Matei (2019) ofrece un estudio a partir del cual se evidencia el complemento que es la música a la hora de enseñar algún otro objeto, estudiando la transdisciplinariedad y el empleo de esta para la construcción de metodologías que integren diferentes disciplinas.

Con relación a la categoría de problemas del aprendizaje, Duval (2004) menciona que la complejidad de los conceptos de cada objeto matemático, no solo se evidencia en el contenido como tal, sino además en los fundamentos que componen las bases operacionales del objeto matemático, dichas particularidades son las que se deben atacar para lograr una óptima construcción del objeto matemático.

Rivière (1990) les da un enfoque cognitivo a las dificultades en el aprendizaje de los objetos matemáticos y basa su investigación en el desarrollo de este mismo enfoque, de igual manera Font, (1994) resalta los errores que pueden tener los estudiantes a la hora de adentrarse en la resolución de problemas matemáticos y su aprendizaje, destacando además la necesidad de motivar a los estudiantes durante el proceso.

Coronado (2016) por su parte, realizó una investigación para determinar las principales dificultades que tienen los estudiantes al operar con números racionales, con lo que concluyó que la problemática está asociada principalmente a la falta de interés de los estudiantes y a la falta de recursos, los estudiantes no identifican las diferentes representaciones que tiene un número racional, por lo que caen en frecuentes errores de interpretación y esto a su vez incrementa la falta de interés por aprender dicho objeto matemático, dichos errores son entonces obstáculos cognitivos para la comprensión de los números racionales.

Para Ruíz (2008), es importante evaluar cinco cuestiones fundamentales si lo que se pretende es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en particular, dichas cuestiones son el conocimiento del docente, el trabajo que se realiza con el estudiante, los métodos de solución empleados, la contextualización matemática y el contenido visto como un todo, cabe resaltar que para el docente no solo se le hace necesario conocer a profundidad el elemento matemático que desea enseñar, sino además los elementos pedagógicos para su correcta enseñanza y la didáctica matemática necesaria para su construcción.

Por su parte, Juidías & Rodríguez (2007) indican que es necesario evaluar las dificultades basados en diferentes factores que actúan a la hora de resolver problemas

matemáticos, dichos factores son los concernientes a los estudiantes, al objeto matemático y al contexto de aprendizaje del mismo problema matemático. Además de esto, para González, Benvenuto, & Lanciano (2017) el análisis de dificultades se debe enfocar en la Competencia Matemática Temprana (CMT) mediante la observación e interpretación de habilidades desarrolladas por los estudiantes a temprana edad, para de esta manera contrarrestarlas en niveles iniciales de escolarización.

Por último, para la categoría de relación música y matemáticas, Santamaría (2020) sugiere que es posible encontrar matemáticas en la música y pretende describir cómo explicar matemáticamente la estructura de las ideas musicales y el lenguaje, enseña entonces las conexiones entre las matemáticas y la música.

Así mismo, Viladot, y otros (2018) enfocan su investigación en la integración de las matemáticas y la música como base para la enseñanza, infieren que, si bien es necesaria la capacitación docente para lograr este tipo de interdisciplinariedad, se evidencia el avance que genera este tipo de educación.

Esta misma interdisciplinariedad es trabajada por Montiel (2017) quien proporciona a este estudio la importancia de apoyar procesos de aprendizaje basados en la enseñanza de ambas disciplinas, así como mencionan Holmes & Hallam, (2017), la actividad musical mejora el rendimiento intelectual de los estudiantes y por ende su aprendizaje, a través de su estudio concluyeron que el conocimiento musical marca el desarrollo en otras habilidades, concernientes para este trabajo, las habilidades matemáticas, sus resultados arrojaron una mejora constante en procesos matemáticos.

Bajo esta misma línea, para Sautoy (2004) es fundamental que los colegios manejen en sus planes de trabajo el vínculo existente entre la música y las matemáticas dada la cercanía entre las estructuras matemáticas y la composición musical. Para Pérez (2013) es fundamental utilizar el atractivo que tiene la música para con las personas en torno a la educación matemática, pues de esta manera se hace más atractivo para los estudiantes el estudio de determinados objetos matemáticos y por consiguiente también mejora su motivación hacia dicha disciplina.

De igual manera, Conde, Parada, & Liern, (2016) resaltan los lazos epistemológicos existentes entre música y matemáticas para beneficiar así la enseñanza y por ende aprendizaje de las fracciones (objeto matemático de esta investigación), exponen que proporcionar experiencias sensoriales a los estudiantes promueve en ellos el constructo de objetos matemáticos, mencionan además que para poder implementar este tipo de enseñanza no solo es necesario que los docentes manejen las disciplinas, sino además requiere que se rompan paradigmas en cuanto al desarrollo de los currículos, como se enseñarán y cómo los estudiantes acogerán dichas técnicas.

Arias & Hernández (2009) por su parte, proponen la enseñanza de los números racionales positivos mediante figuras musicales, sugieren que a través de la composición de la unidad musical se estudian las equivalencias entre las demás figuras musicales tal y como existen en las fracciones.

Para An, Ma, & Capraro (2011) la idea debe ser promover en los docentes la confianza necesaria para enseñar matemáticas junto con música, esto basados en su investigación acerca de la integración entre matemáticas y música, para dicha investigación se enfocaron en cuestionarios previos y posteriores que les permitieran realizar una

evaluación detallada del avance y alcance del proyecto, los resultados arrojaron que en efecto, el proceso de enseñanza-aprendizaje se hace mucho más llevadero y motivador cuando se realiza mediante la música como objeto interdisciplinar.

Bajo la misma línea, Rodríguez, Nascimento, Voigt, & Santos (2019) realizaron un estudio a 42 estudiantes con diferentes rendimientos académicos en matemáticas, básico y medio, luego de estimular sus procesos cognitivos con música y representaciones simbólicas musicales básicas, se evidenciaron mejoras en su rendimiento académico, sin embargo los resultados no solo favorecieron procesos en cognición numérica u operacional, además se observó disminución en el grado de ansiedad de los estudiantes al adentrarse en problemas matemáticos.

Esto mismo se puede verificar en el estudio realizado por Mato, Chao, & Chao (2019), quienes partieron de dos grupos base, uno encaminando la enseñanza de las matemáticas por medio de la música y el otro enfocado en la enseñanza tradicional de las matemáticas, mediante su investigación demostraron que el grupo que tuvo estimulación musical tuvo mayor avance en el aprendizaje.

Por otro lado, al estudiar los números racionales se pueden generar diferentes dificultades, partiendo de su conceptualización, escritura, operaciones o representación. Esta investigación se basa en dificultades de representación de los números racionales. Una de estas dificultades referente a la representación de números racionales es mencionada por (Fandiño, Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos., 2008), en donde indica que los errores más comunes de los estudiantes al presentarle, por ejemplo, un gráfico y preguntarle por la fracción que está allí representada, es que generalmente tienden a tomar como numerador las partes sombreadas y como denominador las restantes, o viceversa.

Otro de los errores más comunes en a la hora de representar fracciones gráficamente, en ocasiones se le pide al estudiante que realice un gráfico dada una fracción y pueden no hacerlo de forma equivalente, tienden a dividir la figura, pero no siempre en partes iguales como es el ideal.

Así mismo la autora también expone que los estudiantes confunden las representaciones, en cuanto a que no identifican que dos fracciones son equivalentes si se representan con diferentes números, ello lo muestra mediante un ejemplo con canicas.

Supongamos que se tienen 2 canicas blancas y 5 canicas negras, esto representaría la fracción $\frac{2}{5}$, al aumentar la cantidad de canicas de manera equivalente y tener ahora 4 canias blancas y 10 canicas negras, la fracción ahora será de $\frac{4}{10}$ que es equivalente a la inicial, pero para los estudiantes no es intuitivo ver dicha equivalencia y notar que $\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{4}{10}$. (Fandiño, Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos., 2008).

También se pueden evidenciar dificultades a la hora de realizar las operaciones de suma y resta entre fracciones, pues los estudiantes tienden a operar como suelen hacerlo con números enteros, sumando o restando entre numeradores y denominadores sin tener en cuenta el algoritmo necesario para su correcto desarrollo.

En conclusión, la identificación de dificultades en la representación gráfica y simbólica de números racionales fraccionarios se enmarca en la comprensión profunda de los procesos cognitivos de los estudiantes, integrando conceptos clave de corrientes teóricas como el constructivismo, la teoría de modelos mentales y la didáctica de las matemáticas. Este enfoque contribuye a una evaluación precisa de las barreras cognitivas que los

estudiantes pueden enfrentar y orienta el diseño de estrategias educativas efectivas para superar estas dificultades.

Después de revisar las distintas perspectivas y enfoques de autores citados, podemos identificar varias tendencias actuales dominantes relacionadas con la didáctica del número racional y su enseñanza mediante la música tales como:

- El énfasis en la representación gráfica y simbólica, dado que la habilidad para representar y relacionar números racionales es crucial para el desempeño en la resolución de problemas y la comprensión del concepto.
- Las dificultades en la enseñanza tradicional, destacando la importancia de explorar metodologías innovadoras para abordar estas insuficiencias y mejorar el proceso de aprendizaje.
- La relación entre representaciones y resolución de problemas, ya que los estudiantes cuyas representaciones están vinculadas de manera más efectiva a la resolución de problemas obtienen puntuaciones más altas en sus desempeños.
- El enfoque en la música como herramienta pedagógica, pues esta es un elemento clave para la educación en primaria y su impacto positivo en el aprendizaje.
- La interdisciplinariedad entre matemáticas y música, para mejorar el rendimiento intelectual y promover la retención de conceptos.
- La consideración de problemas de aprendizaje, puesto que las dificultades en el aprendizaje de los números racionales están asociadas a la falta de interés, falta de recursos y la identificación de representaciones. Se hace necesario evaluar y abordar estas dificultades desde diferentes perspectivas, incluyendo factores cognitivos y motivacionales.

- La importancia del conocimiento y comprensión del docente, en cuanto a las disciplinas matemáticas como de la música. La capacitación docente y la confianza para enseñar matemáticas junto con la música son factores cruciales para el éxito de esta integración.
- El impacto positivo de la música en el rendimiento académico, reduciendo la ansiedad y mejorando el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas.

Estas tendencias sugieren que la integración de la música en la enseñanza de los números racionales, especialmente en el contexto de representación gráfica y simbólica, puede ofrecer beneficios significativos para mejorar el proceso de aprendizaje, abordando dificultades comunes y proporcionando una experiencia educativa más enriquecedora y motivadora para los estudiantes. Presentando de manera contextualizada el concepto de número racional fraccionario y relacionando la importancia de comprender este concepto en la vida cotidiana y su aplicación en diferentes situaciones, pasando por la exploración musical, introduciendo elementos musicales que representen visualmente fracciones (ritmo, duración, tono, etc.) y utilizando ejemplos musicales para ilustrar fracciones simples y complejas, asociando diferentes ritmos y notas con las partes de una fracción.

Se debe integrar la secuencia didáctica con la creación musical con composiciones que reflejen fracciones específicas donde los estudiantes asocien el proceso creativo con la representación simbólica y gráfica de los números racionales. Pasando a conectar la comprensión musical de las fracciones con situaciones prácticas y cotidianas, analizando cómo las fracciones están presentes en la duración de canciones, en la notación musical, y en otras áreas de la vida diaria.

Se hace importante continuar con la práctica y reforzamiento, proporcionando ejercicios prácticos que permitan a los estudiantes aplicar lo aprendido en la representación gráfica y simbólica de fracciones, utilizan problemas matemáticos basados en la música para consolidar el conocimiento. Así mismo implementar evaluaciones regulares para monitorear el progreso de los estudiantes en la comprensión y aplicación de fracciones mediante la música y la retroalimentar de manera constructiva para abordar áreas de mejora facilitando un espacio donde los estudiantes puedan reflexionar sobre su aprendizaje y cómo la música contribuyó a mejorar su comprensión de los números racionales fraccionarios, destacando la importancia de la representación gráfica y simbólica en la consolidación de los conocimientos matemáticos.

En cuanto a la categoría Pedagógica de la representación gráfica y simbólica del número racional fraccionario se hace importante hacer uso de la representación gráfica utilizan ilustraciones, como círculos o rectángulos divididos, para representar fracciones, integrar colores y elementos visuales que faciliten la asociación entre la representación gráfica y la fracción correspondiente. Igualmente asociar símbolos musicales, como notas y ritmos, con fracciones específicas, mostrando cómo la duración de las notas musicales puede relacionarse con la fracción de un todo. Integrando ambas representaciones facilitando actividades donde los estudiantes relacionen la representación gráfica con la simbólica, utilizando la música como medio de conexión con ejercicios que impliquen la creación de composiciones musicales basadas en fracciones representadas gráficamente.

Integrar estas estrategias en la secuencia didáctica permitirá abordar de manera efectiva las dificultades en la representación gráfica y simbólica del número racional

fraccionario, proporcionando a los estudiantes una experiencia educativa enriquecedora y alineada con la misión y visión del Colegio Summerhill School.

Pregunta Problema

Teniendo en cuenta las investigaciones realizadas en el tema, la situación problema y la motivación de las investigadoras; la pregunta que se pretende resolver con el trabajo de investigación es: ¿Cuál secuencia didáctica de enseñanza del número racional como fracción, mediante la música, contribuiría a que los estudiantes con dificultades en las habilidades de la representación gráfica y simbólica mejoren su proceso de aprendizaje?

Justificación de la Pregunta

En cuanto al estado de desarrollo del problema, podemos identificar que la enseñanza de los números racionales como fracciones es un desafío pedagógico, especialmente para estudiantes de quinto grado con dificultades en la representación gráfica y simbólica. Las investigaciones revisadas evidencian que existen obstáculos en la comprensión de los números racionales, y estas dificultades pueden afectar el desarrollo lógico matemático de los estudiantes.

La identificación de dificultades específicas en la representación gráfica y simbólica de los números racionales en estudiantes de quinto grado en el Summerhill School, resalta la necesidad de abordar estas dificultades de manera efectiva y adaptada a las características particulares de los estudiantes, ya que una comprensión deficiente de las fracciones puede tener un impacto negativo en el desempeño académico de los estudiantes y afectar su confianza en el aprendizaje de las matemáticas.

El dominio de los números racionales es esencial para el éxito en esta área del conocimiento y en la resolución de problemas cotidianos. La falta de comprensión de este concepto puede generar lagunas en el conocimiento matemático a lo largo de la educación, por ello es crucial abordar estas dificultades desde una perspectiva pedagógica novedosa, como la integración de la música, encontrando métodos que resuenen con las experiencias y estilos de aprendizaje de los estudiantes, promoviendo así un aprendizaje más significativo.

Es por eso necesario crear una secuencia didáctica que genere un impacto positivo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de quinto grado, específicamente aquellos con dificultades en la representación gráfica y simbólica de los números racionales. Se espera que la integración de la música como herramienta pedagógica no solo mejore la comprensión de las fracciones, sino que también motive a los estudiantes, promoviendo un ambiente de aprendizaje más participativo y enriquecedor.

La adaptación de la secuencia didáctica al contexto de la institución Summerhill School es fundamental, considerando la misión y visión del colegio, que busca formar estudiantes líderes con valores, competencias en diferentes idiomas y altos estándares académicos. La intervención propuesta contribuirá a alinear la enseñanza de los números racionales con los principios institucionales, asegurando un aprendizaje consistente y de calidad.

En resumen, la pregunta problema surge de la necesidad evidente de abordar las dificultades específicas de los estudiantes de quinto grado en la representación gráfica y simbólica de los números racionales. La importancia de esta investigación radica en su

potencial para mejorar el aprendizaje de los estudiantes y contribuir al desarrollo académico y personal de acuerdo con los valores y metas del Summerhill School.

Objetivos

Objetivo General

Proponer una secuencia didáctica de la enseñanza del número racional fraccionario mediante la música, para los estudiantes de grado quinto con dificultades en las habilidades de la representación gráfica y simbólica.

Objetivos Específicos

1. Identificar las dificultades presentes en los estudiantes de quinto grado con las habilidades de representación gráfica y simbólica de los números racionales fraccionarios.
2. Analizar la correlación entre el conocimiento de la música y los números racionales fraccionarios, respecto a las habilidades de representación gráfica y simbólica que pueden desarrollarse, para dar solución a las dificultades detectadas.
3. Diseñar actividades que permitan el desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza del número racional como fracción desde la música, para estudiantes con dificultades en las habilidades de la representación gráfica y simbólica.

Supuesto

A partir de lo mencionado acerca de la necesidad de incrementar la motivación en el aula de clase para los estudiantes a la hora de llevar a la práctica un objeto matemático y,

las dificultades que se desarrollarán en esta investigación acerca de representar los números racionales como fracción en su forma gráfica y simbólica, se plantea el supuesto de que: la música puede mediar como estrategia didáctica de enseñanza en la mejora de las habilidades de comprensión y representación gráfica y simbólica del número racional fraccionario en los estudiantes de quinto grado, promoviendo la motivación en su aprendizaje.

Capítulo II

Marco Teórico-Conceptual

En el corazón de la enseñanza de las matemáticas reside la necesidad de brindar experiencias educativas significativas y efectivas que no solo aborden los desafíos cognitivos de los estudiantes, sino que también fomenten un aprendizaje arraigado y duradero. En este contexto, el presente marco teórico-conceptual se erige sobre los pilares del constructivismo y la teoría socio constructivista, guiando la exploración de la enseñanza del número racional como fracción para estudiantes de quinto grado con dificultades en la representación gráfica y simbólica. La comprensión del número racional como fracción no solo exige una interacción activa con los conceptos matemáticos, sino también un enfoque adaptado a la Zona de Desarrollo Próximo de los estudiantes. Este marco conceptual se adentra en la integración innovadora de la música como herramienta pedagógica, no solo para motivar, sino para facilitar la comprensión profunda de las fracciones, abordando así las barreras identificadas en la representación gráfica y simbólica. A través de categorías metodológicas como la secuencia didáctica, la integración curricular y la evaluación formativa, se busca trazar un camino que no solo enriquezca el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también impacte positivamente el desarrollo matemático y personal de los estudiantes de quinto grado, en sintonía con los principios y metas del Summerhill School.

Posicionamiento Teórico

Constructivismo en Educación Matemática.

La teoría constructivista destaca que el aprendizaje es un proceso activo donde los estudiantes construyen significado a través de la interacción con la información. En el contexto de las matemáticas, se enfatiza la importancia de las experiencias significativas y contextualizadas para internalizar conceptos. Este enfoque destaca que los estudiantes construyen su conocimiento a través de experiencias activas. En el contexto matemático, implica crear situaciones de aprendizaje que permitan a los estudiantes explorar, cuestionar y construir su comprensión de los números racionales como fracciones. (Leiva & Palliotto, 2011).

Teoría Socio constructivista.

El socio constructivismo amplía el constructivismo al resaltar la influencia del entorno social en la construcción del conocimiento. La interacción entre pares, el diálogo y la colaboración son fundamentales para el aprendizaje matemático. Este enfatiza en la influencia del entorno social en el aprendizaje. (Barberà, 2015). Las relaciones y la cooperación, se consideran esenciales. En nuestro diseño, esto se traduce en estrategias que fomentan la comunicación y la colaboración entre los estudiantes.

Teoría de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).

La Zona de Desarrollo Próximo, propuesta por Vygotsky, sugiere que los estudiantes pueden realizar tareas con el apoyo adecuado que no podrían hacer de manera independiente. La enseñanza debe adaptarse al nivel de desarrollo real del estudiante y su ZDP. (Vygotsky, 1978). En la enseñanza de fracciones, esto significa adaptar la instrucción al nivel de desarrollo real de los estudiantes, identificando y ofreciendo el apoyo necesario para avanzar en su comprensión.

Pedagogía cognitiva y conceptual.

La pedagogía conceptual es un modelo pedagógico que tiene como objetivos principales desarrollar tanto las relaciones humanas, como promover el talento laboral y de vida en cada uno de los estudiantes. En ese sentido, le interesa analizar las dimensiones cognitivas enmarcadas en la sociedad actual del conocimiento sin dejar de lado el estudio pedagógico de los procesos de pensamiento. Esta pedagogía tiene sus raíces en la psicología cognitiva, utiliza los conocimientos sobre las etapas de desarrollo de sus estudiantes para actuar congruentemente con estos y encaminarlos a sus objetivos principales. (Rodríguez Palmero, 2008). En los últimos años la pedagogía conceptual adopta diferentes postulados como el científico, planteado por el arqueólogo Steve Mithen. (Zubiría Samper, 2007), el del triángulo humano, donde el ser humano se constituye por tres sistemas; el sistema cognitivo, el sistema afectivo y el sistema expresivo. (Vega García & Guerra Tibocha, 2020).

Conceptos***Número Racional como Fracción.***

Existen múltiples formas de entender el número racional que cambian la manera en la que los conceptos se definen y trabajan. Fandiño, en su libro *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos* (2009), enuncia las distintas definiciones y sus implicaciones didácticas.

Entender el número racional como fracción implica comprender su naturaleza como una relación parte-todo. Esto incluye la capacidad de representar gráfica y simbólicamente fracciones, reconocer equivalencias y realizar operaciones con estos números.

Fundamentado en el constructivismo, esta enseñanza debe abordar estas dimensiones para

lograr un entendimiento integral, fomentando la percepción de las fracciones como porciones o partes proporcionales de una totalidad, estableciendo la base conceptual del número racional. Esta conceptualización no solo es fundamental en el ámbito académico, sino que también proporciona herramientas poderosas para abordar situaciones prácticas y resolver problemas matemáticos en la vida cotidiana. Y es por eso que se toma la definición de Fandiño de las fracciones vistas como número racional, en el que el número racional se ve como una clase de equivalencia donde las parejas $[a,b]$ y $[c,d]$ estarán relacionadas siempre y cuando $ad=cb$. En este caso se elegirá a un representante de esa familia para denotar a esa clase. Por ejemplo la clase $[(1,2),(2,4),(4,8),\dots]$ que son todas las posibles representaciones de 0,5 le pondremos como representante principal a $\frac{1}{2}$ y se entenderá que se puede reemplazar a $\frac{1}{2}$ por cualquier elemento de su clase.

Música como Herramienta Pedagógica.

La música por sí sola a partir de su versatilidad genera no solo la necesidad de ser empleada en diferentes contextos, sino que además atrae la atención de los estudiantes a la hora de aprovecharla como medio de enseñanza. Los estudiantes tienden a adquirir mejor los conceptos abordados en el aula de clase cuando éstos se trabajan mediante actividades que estimulen su aprendizaje. (Hoffer, 2005). Mediante la música se puede generar motivación en los estudiantes a la hora de aprender alguna disciplina. Según afirma Howard Gardner citado en (Álvarez y otros, 2016). La música se presenta como un vehículo didáctico para la enseñanza de las matemáticas, aprovechando sus elementos rítmicos y melódicos. La música puede proporcionar una conexión intuitiva con los conceptos matemáticos, incluidos los números racionales. En nuestro diseño, profundizamos cómo elementos musicales como ritmo, melodía y estructuras rítmicas pueden utilizarse para

representar y comprender los números racionales como fracciones. Explorando elementos más específicos de la música, como la métrica y el tempo, podemos representar relaciones fraccionarias. Además, es evidente la conexión emocional que la música puede establecer, mejorando la motivación, la participación y la retención del conocimiento.

Secuencia Didáctica.

Una secuencia didáctica estructura la enseñanza de manera secuencial y progresiva. Debe ser diseñada considerando las características cognitivas de los estudiantes y las metas de aprendizaje. (Díaz-Barriga, 2015). En este contexto, la secuencia debe abordar específicamente las dificultades en la representación gráfica y simbólica de los números racionales. Una secuencia didáctica progresiva y adaptada a las necesidades específicas de los estudiantes guiará la enseñanza de los números racionales. Esta se diseñará considerando la evolución conceptual de los estudiantes y la integración de la música de manera coherente, considerando la progresión lógica de la comprensión de fracciones, desde conceptos fundamentales hasta aplicaciones más avanzadas, explorando estrategias para abordar las dificultades específicas identificadas en la representación gráfica y simbólica. Es importante que la secuencia didáctica se adapte a las características y necesidades particulares de los estudiantes de quinto grado, asegurando una progresión coherente y apoyo adecuado a lo largo del proceso de aprendizaje.

Relación Música y Matemáticas.

Teniendo en cuenta que al enseñar matemáticas se hace necesario asumir una motivación que impulse el aprendizaje de los estudiantes al mismo tiempo que cautive su atención a la hora de aprender, es mediante la música que se pretende en esta investigación lograr no solo la atención de los estudiantes sino, además, la enseñanza del número racional

para estudiantes con dificultades en la representación gráfica y simbólica. Para dar inicio a eso se expone a continuación la relación histórica y temática existente entre la música y las matemáticas.

Partiendo de los estudios realizados por Pitágoras (Siglo VI a.C.) en donde se evidencia la relación entre la longitud de la cuerda y el sonido que esta emite mediante el monocordio¹, se empieza a definir “intervalo sonoro”, pues al dividir la cuerda en dos se emite la misma tonalidad, pero más aguda, así pues, mediante matemáticas se empiezan a generar escalas de sonidos, obteniendo de esta manera notas musicales. (Alves dos Santos, 2005).

Los autores Pablo Arias y Erika Hernández en su propuesta de “Enseñanza de la fracción y de los números racionales positivos implementando las figuras musicales” mencionan que teniendo en cuenta el hecho de que mediante las particiones se generan sonidos, podemos notar, que las notas musicales tienen cada una en sí un valor numérico, partiendo en la redonda cuyo valor es la unidad, dividiendo así el tiempo hasta en 32 partes, que es la figura “fusa”, en la que hay 32 pulsos en un solo tiempo, así empezamos a ver la relación entre la música y los números racionales, veamos en la siguiente imagen cada figura musical con su respectivo valor numérico. (Arias & Hernández, 2009)

¹ Monocordio: un instrumento musical de una sola cuerda que acompañaba la monodia al unísono; puede clasificarse dentro del grupo de cordófonos pinzados y frotados. Tomado de (<https://educalingo.com/es/dic-es/monocordio>)



Imagen 1. Particiones musicales (Arias & Hernández, 2009)

Es importante mencionar, además, que en la construcción de compases también se hace presente el uso de los números racionales, pues es necesario sumar sus valores para completar la unidad del compás, veamos la siguiente imagen y un ejemplo de ello:

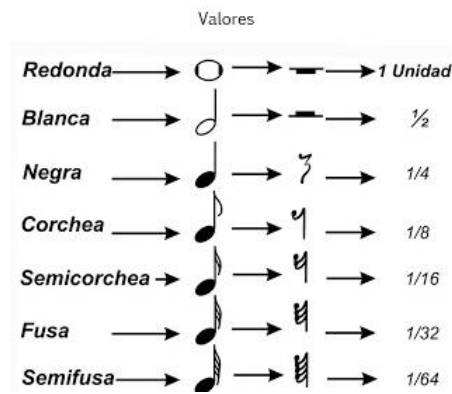


Imagen 2. Valores de las notas (Escamilla, 2010)

En este ejemplo es necesario sumar las figuras musicales para que en cada compás la suma sea la unidad.

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 1$$

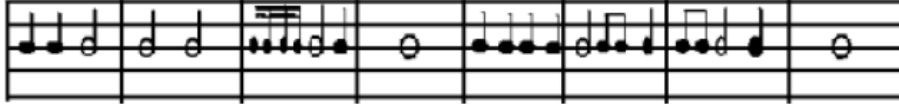


Imagen 3 Ejemplo de construcción de compás mediante suma de fracciones. (Arias & Hernández, 2009)

Se puede observar que, en cada compás, al sumar los valores de sus figuras musicales el resultado es la unidad, que en este caso es la redonda. Así, vemos que las matemáticas también están presentes en la música con múltiples funcionalidades, además de operaciones.

Capítulo III

Marco Metodológico

El proyecto busca abordar las dificultades de los estudiantes de grado quinto a la hora de representar gráfica y simbólicamente el número racional como fracción. Todo esto desde el contexto escolar de un colegio privado de Cota, Colombia y, desde la mirada investigadora de dos docentes de matemáticas. De los 10 grupos de quinto existentes en el colegio, se escogerá uno representativo (33 estudiantes) sin alguna característica especial respecto a los demás grupos, son estudiantes típicos en ese grado, una vez aplicado el test diagnóstico se buscarán las dificultades en la representación gráfica y simbólica del objeto matemático en estudio, en el test se evalúan preguntas enfocadas a identificar dichas dificultades (ésta descripción se evidencia en Estrategias de evaluación, Evaluaciones/Test Diagnóstico), de esta manera se desarrollarán complementos que permitan el empleo de la música como enseñanza del objeto matemático.

Se pretende, además, tener en cuenta cómo los estudiantes desarrollan la representación del objeto matemático, y a partir de ello iniciar la construcción de la secuencia didáctica, por lo que el alcance es descriptivo propositivo.

A continuación, se relacionan el cronograma de la investigación y en la tabla 2 los aspectos característicos de la metodología de investigación seguida: el paradigma epistémico, la ruta o enfoque de estudio, el tipo de investigación y su alcance, las estrategias cualitativas, las categorías de estudio y, por objetivos específicos correspondientes a las fases, el método, las técnicas y los instrumentos de apoyo.

Tabla 2

Marco metodológico.

Paradigma epistémico de la investigación	Interpretativo		
Ruta de investigación	Cualitativa		
Tipo o alcance de investigación	Descriptivo-Propositivo		
Estrategias de investigación	Investigación documental Análisis documental		
Categorías de investigación/ Subcategorías	Didáctica del número racional	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Historia del número racional ↪ Definición del número racional como fracción ↪ Enseñanza del número racional como fracción 	
	Didáctica mediante la música	<ul style="list-style-type: none"> ↪ La música como herramienta de aprendizaje 	
	Problemas de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Dificultades en la representación de números racionales ↪ Dificultades en la representación gráfica y simbólica de números racionales como fracción 	
	Relación música y matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Enseñanza de las matemáticas mediante la música ↪ Enseñanza del número racional como fracción mediante la música 	
Objetivos específicos	Métodos	Técnicas de análisis de información	Instrumentos de apoyo
Objetivo No. 1	Inductivo	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Test evaluativo de un Caso de estudio -Análisis de contenido ↪ Triangulación 	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Matrices ↪ Tabla Excel ↪ Test diagnóstico
Objetivo No. 2	Deductivo	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Análisis de contenido ↪ Triangulación 	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Matrices ↪ Tabla Excel ↪ Esquema de representación
Objetivo No. 3	Análítico deductivo	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Análisis y síntesis del contenido 	<ul style="list-style-type: none"> ↪ Diseño de secuencia didáctica desde el formato de Díaz Barriga

A continuación, se argumenta lo señalado de manera esquemática en la tabla.

Paradigma

Esta investigación parte de las necesidades y aptitudes de los estudiantes de grado quinto del colegio Summerhill, a la hora de entender el número racional gráfica y simbólicamente. Por lo que es necesario, no sólo ver la parte teórica de los problemas presentados, sino también, entender la realidad del aula escolar, para poder comprender las problemáticas a profundidad y bajo un contexto definido.

Según Vasilachis de Gialdino (1992) el supuesto básico del paradigma interpretativo es “la necesidad de comprensión del sentido de la acción social en el contexto del mundo, de la vida y, desde la perspectiva de los participantes” (p.22) En este sentido, se reconoce la importancia de comprender las experiencias y percepciones de los estudiantes de quinto grado con dificultades en las habilidades de representación gráfica y simbólica, así como su relación con la música en el proceso de enseñanza-aprendizaje de números racionales fraccionarios. Por lo tanto, el paradigma interpretativo proporciona el marco teórico adecuado para explorar en profundidad las complejidades de este fenómeno educativo, permitiendo una comprensión holística y contextualizada de las dinámicas involucradas.

Enfoque

Según Creswell (2013) “la investigación cualitativa es un proceso interrogativo de comprensión, basado en distintas tradiciones metodológicas de indagación, que exploran un problema social o humano. El investigador construye un panorama complejo y holístico,

analiza discursos, refiere visiones detalladas de los informantes y lleva a cabo el estudio en un entorno natural.” (p. 14)

En esta investigación inicialmente se pretende evaluar mediante rubricas de evaluación las competencias requeridas en los estudiantes, de esta manera poder formular una estrategia didáctica usando la música y, por último, realizar un análisis de cómo la música puede influenciar de manera positiva en su aprendizaje. Para eso, en el primer objetivo se necesita la recolección de información por medio de pruebas diagnósticas, que se analizan inductivamente, centrando la atención hacia las necesidades de los estudiantes y describiendo los resultados obtenidos. En el segundo objetivo, se realiza un análisis documental de textos, para entender la relación música-matemática y encontrar las estrategias adecuadas para la enseñanza de la representación gráfica y simbólica de la fracción usando la música, para así poder diseñar la secuencia didáctica en el tercer objetivo.

El enfoque cualitativo de la investigación se caracteriza por su interés en comprender fenómenos complejos desde la perspectiva de los participantes, centrándose en la exploración profunda de significados, experiencias y contextos sociales. En este caso, el enfoque cualitativo adoptado en la investigación sobre la enseñanza de números racionales fraccionarios mediante la música se basa en los principios teóricos y metodológicos de destacados autores en el campo de la investigación cualitativa.

(Creswell, 2013) proporciona un marco metodológico sólido para el diseño y la implementación de investigaciones cualitativas, enfatizando la importancia de la inmersión en el contexto, la flexibilidad en el proceso de investigación y la interpretación profunda de los datos recopilados. Merriam (1988), ofrece una perspectiva valiosa sobre el enfoque

cualitativo en la investigación educativa, destacando la importancia de la comprensión holística y contextualizada de los fenómenos educativos.

Strauss y Corbin (1990) , por su parte, son pioneros en el desarrollo de metodologías cualitativas específicas, como la teoría fundamentada, que permite generar teorías desde los datos recopilados en el campo. Su enfoque sistemático y riguroso para analizar datos cualitativos ha sido ampliamente utilizado en diversas disciplinas.

Patton (1980) contribuye con su enfoque centrado en la utilidad y relevancia de la investigación cualitativa, destacando la importancia de generar conocimiento significativo y aplicable en contextos prácticos.

En conjunto, estos autores proporcionan un sólido marco teórico y metodológico para la investigación cualitativa sobre la enseñanza de números racionales fraccionarios mediante la música. Este enfoque cualitativo permite una comprensión profunda de las experiencias y perspectivas de los estudiantes, así como el diseño de estrategias didácticas efectivas y la evaluación del impacto de la música en el proceso de aprendizaje.

Tipo de Investigación

Dentro del amplio espectro que ofrece la investigación cualitativa, el presente trabajo se inscribió en el alcance descriptivo y propositivo. La investigación inició con la aplicación de un test diagnóstico de contenido, para identificar el problema objeto de estudio en los estudiantes de quinto grado del grupo seleccionado. Posteriormente, se hace una elección desde los marcos teóricos de dos autores reconocidos, Arias & Hernández (2009) y Fandiño (2009), en la temática para, desde la investigación de análisis documental y la técnica de análisis de contenido, profundizar en sus teorías y conceptos, y dar una argumentación

coherente al problema de la representación gráfica y simbólica de los números racionales como fracción, en el aprendizaje de los niños de quinto, para luego establecer en el segundo objetivo la correlación existente con la música.

En cuanto, a lo descriptivo, su importancia radicó en que esta investigación consideró que, para comprender una realidad, es necesario describir aquello que es fundamental en cada una de las categorías extraídas, de los conceptos asumidos en el marco teórico-conceptual y, actores que rodean dicha problemática. Es decir, se debe tener un entendimiento profundo tanto de los conceptos tratados, como del contexto y desafíos que presentan los estudiantes de grado quinto, a la hora de aprender el concepto de fracción y su representación gráfica y simbólica.

Al respecto, en palabras de Sampieri (2014), una de las tareas fundamentales en investigación, está relacionada con la descripción del fenómeno, de situaciones, relaciones, acontecimientos, escenarios, contextos y, para lo cual es importante percatarse de los aspectos que los componen, requiriéndose un nivel de detalle sobre cómo se gestan y manifiestan dichos acontecimientos en la realidad de estudio.

La descripción es el resultado del análisis de los textos seleccionados desde las categorías teóricas, y el diagnóstico, a partir de la Investigación Documental que según Solís Hernández en *La Guía De Análisis Documental* del Consejo latinoamericano de (2022), es considerada como “la operación que consiste en seleccionar las ideas informativamente relevantes de un documento a fin de expresar su contenido sin ambigüedades, para recuperar la información en el contenida” (Solís, 2022, p.2). Este proceso de análisis no solo comprende la identificación de conceptos clave y su relación con el tema de investigación, sino también la evaluación de las dificultades presentes en los estudiantes de quinto grado con las

habilidades de representación gráfica y simbólica de los números racionales fraccionarios, como se detalla en el diagnóstico. Este diagnóstico, junto con la revisión de documentos de investigación y del marco conceptual asumido, sirve como punto de partida de la acción propositiva que se plantea en el tercer objetivo, que consiste en diseñar una secuencia didáctica.

Estrategias de investigación

Investigación documental

El objetivo de la investigación documental reúne el análisis y la interpretación de información alrededor del objeto matemático en estudio, para (Morales, 2003) la investigación documental es el resultado de la lectura, análisis y reflexión de investigaciones previas acerca el objeto.

Los resultados de esta investigación documental se encuentran en la tabla 4, citada en el apartado del análisis de resultados proyectada en el objetivo 1, en donde se detalla el resumen de los documentos estudiados. Este resumen junto al análisis de su relación con la presente investigación se lleva a cabo con el propósito de obtener una visión integral del estado del arte en el campo de estudio. La revisión de los libros seleccionados no solo busca identificar limitaciones o problemas en la representación de la bibliografía con la que estudian los alumnos, sino también entender cómo los conceptos abordados en estos documentos se relacionan con los objetivos y el enfoque de la investigación actual. En este sentido, la revisión se enfoca en analizar la pertinencia y la aplicabilidad de los conocimientos teóricos encontrados en la literatura revisada para abordar las dificultades identificadas en el test diagnóstico realizado.

La relación entre la revisión documental y el test diagnóstico radica en su complementariedad para alcanzar una comprensión más completa de las dificultades de los estudiantes y las posibles estrategias de intervención. Si bien el test diagnóstico se utilizó para identificar los aprendizajes y las dificultades específicas de los estudiantes en cuanto a la representación gráfica y simbólica de los números racionales fraccionarios, la revisión documental proporciona un marco teórico y práctico para entender estas dificultades desde una perspectiva más amplia. Además, la revisión documental permite identificar enfoques, metodologías y estrategias que han demostrado ser efectivas en situaciones similares, lo que puede orientar el diseño de la secuencia didáctica propuesta en la investigación.

Técnica de análisis de contenido

El camino metodológico seguido en la investigación se caracteriza por un enfoque mixto que integra tanto la exploración de fuentes documentales como la realización de un test diagnóstico con los estudiantes. En primer lugar, se realizó una revisión exhaustiva de dos textos guía ampliamente utilizados en el contexto educativo para abordar el tema de los números racionales como fracciones en los grados quinto, sexto y séptimo del colegio. Estos textos seleccionados fueron “Aritmética 2” de Bello, I (2010) y “Go Math” Middle School, Grade 6” (2018). El objetivo de esta revisión documental fue evaluar cómo estos libros de texto presentan la representación gráfica y simbólica de las fracciones, así como identificar si incluyen estrategias didácticas basadas en elementos musicales para facilitar el aprendizaje de este tema. Sin embargo, se encontró que ninguno de los dos libros abordaba estrategias didácticas que incorporaran la música como herramienta pedagógica para la enseñanza de los números racionales fraccionarios.

Posteriormente, se llevó a cabo un test diagnóstico con los estudiantes de quinto grado del colegio, con el fin de identificar las dificultades específicas que enfrentaban en la representación gráfica y simbólica de las fracciones. Este test permitió obtener datos concretos sobre el nivel de comprensión y dominio de los conceptos relacionados con los números racionales fraccionarios, así como detectar las áreas donde los estudiantes presentaban mayores dificultades.

El análisis conjunto de los resultados de la revisión documental y del test diagnóstico proporcionó una base sólida para diseñar una secuencia didáctica que abordara las necesidades específicas de los estudiantes en cuanto a la representación gráfica y simbólica de las fracciones. Además, este enfoque metodológico mixto permitió identificar la relevancia de incorporar la música como recurso pedagógico para mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes en este tema.

Posteriormente, se presenta un análisis de contenido y de los ejercicios con los que se evalúa la comprensión del objeto matemático. Bajo una revisión del plan analítico se muestra que los textos abordan el concepto del objeto de estudio. (Bello, 2010).

El análisis de contenido y de los ejercicios para evaluar la comprensión del objeto matemático se realizó mediante un enfoque metodológico que integra técnicas de revisión documental y análisis cualitativo. En primer lugar, se llevó a cabo una revisión detallada de los textos seleccionados, que incluyó la identificación y extracción de los ejercicios relacionados con la enseñanza de los números racionales como fracciones. Estos ejercicios fueron sometidos a un análisis minucioso para determinar cómo abordaban el concepto del objeto de estudio y qué estrategias didácticas empleaban para facilitar la comprensión de este tema por parte de los estudiantes.

Los resultados de este análisis se encuentran detallados en el apartado correspondiente de la investigación, donde se presenta una síntesis de los hallazgos obtenidos a partir de la revisión de los textos. Este análisis proporciona una visión general de cómo los libros de texto abordan el concepto de números racionales fraccionarios y qué enfoques didácticos utilizan para enseñar este tema.

Burger E., Dixon J., Kanold T., Larson M., Leinwand S., Sandoval-Martinez M. (2018), abordan el objeto matemático en el módulo tres luego de explorar los números enteros, factores y múltiplos, para posteriormente clasificar números racionales, identificar opuestos, valor absoluto, comparación y orden, todo esto como reconocimiento del objeto. Luego de ello, en la unidad 2 usan el mínimo común múltiplo para sumar y restar números racionales como fracción.

El objetivo de realizar este análisis fue identificar las fortalezas y limitaciones de los materiales educativos disponibles en el contexto escolar en relación con la enseñanza de los números racionales como fracciones. Estos resultados sirven como base para diseñar una secuencia didáctica que aborde las necesidades específicas de los estudiantes en cuanto a la comprensión y dominio de este concepto matemático.

De esta manera, se concluye que el camino metodológico seguido en la investigación combina la revisión documental con el análisis cualitativo de los ejercicios encontrados en los textos seleccionados. Este enfoque metodológico permite obtener una comprensión profunda de cómo se enseña el tema de los números racionales fraccionarios en el contexto escolar y proporciona información valiosa para el diseño de intervenciones educativas efectivas.

Evaluaciones/Test Diagnóstico

El primer instrumento diseñado para el desarrollo de la investigación se trató de un “test diagnóstico”, mediante el cual se logró evidenciar dificultades relacionadas con la representación gráfica y simbólica de los números racionales en cuatro estudiantes de grado quinto, seleccionados de manera que sea un grupo heterogéneo respecto al aprendizaje de las matemáticas.

El test diagnóstico (ver [anexo 1](#)) está diseñado con preguntas que se relacionan con las categorías de didáctica de las matemáticas y problemas de aprendizaje, dado que a este punto de la investigación se necesitan verificar aspectos de dichas categorías.

Este test diagnóstico se relaciona con los libros analizados, en cuanto a la necesidad de validar y contextualizar los resultados obtenidos a partir de la revisión de los materiales educativos. En este sentido, el test diagnóstico se diseñó con el propósito de evaluar el nivel de comprensión y dominio de los estudiantes en relación con los conceptos abordados en los libros analizados.

Las preguntas del test diagnóstico se seleccionaron cuidadosamente para abarcar aspectos clave de la didáctica de las matemáticas y los problemas de aprendizaje que fueron identificados durante el análisis de los libros. Esto significa que las preguntas están diseñadas para evaluar la comprensión de los conceptos y habilidades que se espera que los estudiantes adquieran a partir de la enseñanza de los números racionales como fracciones, tal como se presentan en los materiales educativos revisados.

Por lo tanto, el test diagnóstico sirve como un instrumento complementario que permite corroborar y ampliar la comprensión de las fortalezas y debilidades identificadas en

los libros analizados. Los resultados del test diagnóstico proporcionan información adicional sobre el nivel de dominio de los estudiantes en relación con los contenidos y las estrategias didácticas propuestas en los materiales educativos, lo que ayuda a contextualizar y enriquecer el análisis de estos últimos.

El test diagnóstico presentado es un instrumento utilizado para evaluar el conocimiento y comprensión de los estudiantes sobre el concepto de números racionales como fracciones. A continuación, realizaremos su caracterización.

Tipo de test: este test se clasifica como un test de opción múltiple, ya que presenta varias alternativas de respuesta para cada pregunta, de las cuales el estudiante debe seleccionar la que considere correcta.

Partes del test:

- Preguntas teóricas. Las preguntas iniciales (1 a 5 y 9) están destinadas a evaluar el conocimiento conceptual sobre fracciones y su representación simbólica.
- Relación entre fracciones y su representación gráfica. La pregunta 6 consiste en relacionar fracciones con sus representaciones gráficas, lo que permite evaluar la comprensión visual de los estudiantes.
- Identificación de fracciones en imágenes. Las preguntas 7 y 8 presentan imágenes que representan fracciones, y los estudiantes deben identificar correctamente la fracción correspondiente.
- Operaciones con fracciones. Las preguntas 10 a 13 requieren que los estudiantes realicen operaciones aritméticas con fracciones, lo que evalúa su habilidad para aplicar conceptos matemáticos.

- Relación entre fracciones y figuras musicales: Las preguntas 14 y 15 establecen una relación entre fracciones y figuras musicales, evaluando la comprensión de la relación entre música y matemáticas.

Tipo de preguntas.

- Preguntas 1 a 5 y 9: preguntas de definición y concepto de selección múltiple con única respuesta.
- Pregunta 6: pregunta de correspondencia.
- Preguntas 7 y 8: preguntas de identificación de selección múltiple con única respuesta.
- Preguntas 10 a 13: preguntas de operaciones matemáticas de selección múltiple con única respuesta.
- Preguntas 14 y 15: preguntas de relación entre conceptos de selección múltiple con única respuesta.

El diseño y aplicación de test diagnósticos como herramientas de evaluación en educación se basa en teorías de la medición educativa y la evaluación del aprendizaje. Autores como (Brookhart & Nitko, 2016) en su libro "Educational Assessment of Students" proporcionan fundamentos teóricos y prácticos sobre el diseño y uso de pruebas en el contexto educativo. Además, las directrices y recomendaciones de organizaciones educativas y de evaluación, como el Educational Testing Service (ETS, 2023) y el American Educational Research Association (AERA, 2023), también respaldan el desarrollo y aplicación de pruebas diagnósticas para evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Fases y procedimientos

Cada fase de la investigación se encuentra relacionada con un objetivo específico, es por ello que la investigación se llevó a cabo en 3 fases, en donde las descripciones presentadas conllevan a la exploración de dicho objetivo.

Tabla 3

Fases de la investigación según cada objetivo específico.

Objetivos específicos	Fases
Objetivo No. 1	1. Realizar una exploración de textos que permita identificar tipos de representación gráfica y simbólica de los números racionales.
	2. Realizar una selección de estudiantes que serán evaluados para la construcción de la secuencia didáctica a partir de las necesidades observadas.
	3. Realizar un test diagnóstico mediante el cual se puedan evidenciar dificultades relacionadas con la representación gráfica y simbólica de los números racionales como fracción.
	4. Aplicar el test diagnóstico a los estudiantes previamente seleccionados.
	5. Analizar los resultados obtenidos en el test diagnóstico para puntualizar las dificultades observadas, identificando los problemas y su solución usando los textos de estudio. Dándole un espacio a la didáctica de la música como un camino válido. Contribuyendo así el objetivo 1 a la construcción del esquema de representación gráfica y simbólica a través de la música, aportando al objetivo 2.
Objetivo No. 2	1. Realizar una exploración de textos que permita identificar la relación entre la música y el objeto matemático - número racional como fracción.
	2. Identificar los elementos de la relación entre la música y el número racional que permitan abordar y minimizar las dificultades encontradas en la fase 1.
	3. Utilizar los elementos de la relación entre la música y el número racional identificados previamente para construir un esquema de representación a manera de modelo visual que muestre cómo se relacionan los conceptos musicales y los números racionales como fracciones. Este esquema podría incluir símbolos musicales junto con fracciones numéricas, mostrando cómo se pueden asociar y entender en conjunto.
	4. Aplicar dicho esquema de representación a los estudiantes seleccionados en la fase anterior., ya que el propósito de esta representación es ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor la conexión entre la música y las matemáticas, específicamente en el contexto de los números racionales fraccionarios.

**Objetivo No.
3**

1. Evaluar los resultados obtenidos en los estudiantes a partir del esquema de representación descrito en el objetivo 2 de estas fases. Contribuyendo a la solución de los problemas hallados en el objetivo 1
 2. Implementar acciones didácticas utilizando aspectos positivos encontrados en el test diagnóstico. Lo cual no sería posible sin la evaluación del esquema de representación presentado en el objetivo 2, el cual nos permite dirigirnos al siguiente paso de este objetivo del diseño de la secuencia didáctica.
 3. Diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del número racional para estudiantes con dificultades en las habilidades de la representación gráfica y simbólica, mediante los elementos implementados en la fase 2.
-

Capítulo IV

4.1 Resultados y Análisis

4.1.1. Objetivo I

En este epígrafe se presenta el resultado correspondiente al primer objetivo específico de identificar las dificultades presentes en los estudiantes de quinto grado con las habilidades de representación gráfica y simbólica de los números racionales como fracción.

Para establecer las dificultades presentes en los estudiantes de quinto grado, al momento de representar gráfica y simbólicamente los números racionales como fracción, se realizó una revisión documental de investigaciones y artículos encontrados en el estado del arte. Esos resultados se utilizaron en el diseño de un test diagnóstico aplicado a una muestra significativa de estudiantes de grado quinto del colegio en contexto.

Tabla 4
Revisión Documental

Anexo 2: Revisión documental						
ID	ENLACE DE ACCESO	TÍTULO	REFERENCIA AKA	NIVEL	DETALLE	ANÁLISIS
1	http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2016.1198384	Neural representations of magnitude for natural and rational numbers	Duval, M., Chang, J. N., Bassil, M., Hahn, K. J., & Pica, M. (2016). Neural representations of magnitude for natural and rational numbers. <i>NeuroImage</i> , 141, 324-332. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2016.07.052	Interaccional	Humans have developed multiple symbolic representations for numbers, including natural numbers (positive integers) as well as rational numbers (both fractions and decimals). Despite a considerable body of behavioral and neuroimaging research, it is currently unknown whether different notations map onto a single, fully abstract, magnitude code or whether separate representations exist for specific number types (e.g., natural versus rational) or number representations (e.g., base-10 versus fractional). We address this question by comparing brain activity responses during a magnitude comparison task involving different notations (integers, decimals, and fractions). Univariate and multivariate analyses revealed that the strength and pattern of activation for fractions differed systematically, with the triangular subset, from that of both decimals and integers, while the latter two number representations appeared virtually indistinguishable. These results demonstrate that the two major notational forms for rational numbers, fractions and decimals, evoke distinct neural representations of magnitude, with decimal representations being more closely linked to those of integers than those of magnitude-equivalent fractions. Our findings thus suggest that number representation (base-10 versus fractional) is an important organizational principle for the neural substrate underlying mathematical cognition.	¿El código que manejan en la respuesta matemática del cambio durante un de comparación, además de estar en la representación de números tanto racionales como decimales. Además reconociendo que la representación en un código organizativo importante para el número racional subyace a la cognición matemática, que justamente es uno de los propósitos a tener en cuenta en el trabajo.
2	http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2016.1198384	From Music to Mathematics: Exploring the Connections by Carol E. Roberts	DeLenn, Sorenson, G. (2020). From Music to Mathematics: Exploring the Connections by Carol E. Roberts. <i>BALTRACPE JOURNAL OF MUSIC AND MATHEMATICS</i> , 1(1), 1-10. https://doi.org/10.1080/26908140.2020.1811111	Interaccional	From Music to Mathematics: The relationship between both uses that enable approaches to a wide variety of experiences – Carol E. Roberts's work From Music to Mathematics: Exploring the Connections, which is intended to be a university textbook, offers the concept of how mathematics occur in music and mathematics taught by the author. Roberts's work is about finding the mathematics in certain music and discussing how we can mathematically represent and explain the structure of musical ideas and language. Roberts points to the high complexity and multiplicity of the connections between mathematics and music and offers the potential of mathematics to mathematics and music.	Si utilidad radica en la aplicación que ofrece sobre la relación entre la música matemática y el cómo explicar ciertas estructuras musicales mediante la matemática.
	http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2016.1198384	The integration of music and mathematics education in Catalonia	Wade, L., Hill, C., Casals, A., Saunders, J., Clark, C., Heron, J., Gordon-Hyatt, C., Pugh, M., & Wade, G. (2018). The integration of music and mathematics education in Catalonia.		The relationship between music and mathematics has often been the subject of discussion, both inside and outside the field of education. As part of an exciting project on a European scale, the paper explores the changing contexts in Catalonia (Spain) and England (UK) in relation to the integrated approach to the teaching of music and mathematics. We analyse three areas: academic literature, the curriculum literature and publications and resources prepared by and for	Su importancia en el proyecto de grado en la relación que maneja entre la matemática y la música, tanto dentro como fuera del campo de la educación.

Nota: Dada la extensión de la tabla, se añade el siguiente enlace para su revisión (Revisión Documental).

En ese diseño se tuvieron en cuenta distintos tipos de representaciones gráficas y simbólicas de las fracciones puesto que uno de los problemas encontrados fue la falta de habilidad para comprender las equivalencias entre las distintas representaciones (Beyranevand, 2014), (Moseley & Okamoto, 2008) (DeWolf y otros, 2016). También se aplicaron preguntas teóricas, para verificar el entendimiento del concepto del número racional, ya que ese es otro problema frecuente en los estudiantes que están aprendiendo los números racionales. (Obando, 2003), (Gairín, 2001).

Luego de la revisión realizada en el estado del arte, se abordaron dificultades a la hora de representar gráfica y simbólicamente el número racional como fracción, tales como la forma en que los estudiantes dividen el todo en una figura para tomar las partes, en consecuencia, también la percepción inicial que tienen de los elementos que construyen la fracción (numerador y denominador) y cómo estos se relacionan con lo que consideran el todo. De igual manera se menciona la dificultad al realizar operaciones como la suma y la resta de las fracciones, dado que tienden a realizarlo como una operación directa entre numeradores y denominadores, siendo esta una dificultad que se aborda desde su representación simbólica.

Es por ello, que se decide generar un test diagnóstico (Anexo 1) que aborde dichas dificultades y permita a las investigadoras evidenciarlas para de esta manera crear una estrategia de enseñanza mediante la música que mejore los procesos de enseñanza – aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

El test diagnóstico generado se desarrolla de tal manera que no solo apunta a las dificultades que pueden tener los estudiantes, sino que además a encontrar la estrategia pedagógica que permita la enseñanza del número racional como fracción de una manera

agradable al estudiante y de fácil recordación. Es por ello que se realizan preguntas como se detallan a continuación:

El test diagnóstico utilizado en esta investigación se diseñó considerando varias partes que se relacionan con las categorías de la didáctica de las matemáticas y problemas de aprendizaje. Las preguntas del 1 al 5 y la número 9 son de tipo de definición y concepto de selección múltiple con única respuesta, fueron especialmente diseñadas para evaluar las ideas previas de los estudiantes sobre el número racional como fracción, abordando aspectos como su definición, comunicación y estructura. Este enfoque permitió a la investigación conocer el nivel de comprensión inicial de los estudiantes antes de aplicar la secuencia didáctica. Durante la aplicación del test, se evaluó la relación entre el docente, el estudiante y la didáctica, observando cómo el docente proporcionaba los medios para que los estudiantes fueran constructores de su propio conocimiento.

Tabla 5

Preguntas del 1 al 5 del test Diagnóstico aplicado a los estudiantes.

1. Una fracción matemáticamente está representada por dos números ubicados uno sobre otro. El nombre que recibe cada uno de estos números es:
 - a. Numerador y divisor.
 - b. Numeral y denominador.
 - c. Numerador y denominador.
 - d. Numeral y fraccional.

2. En la fracción $\frac{3}{4}$, el numerador es el número
 - a. Ninguno de los dos
 - b. El número 3
 - c. El número 4

3. ¿Como se lee la fracción $\frac{3}{8}$?
 - a. Tres ocho
 - b. Tercio de ocho
 - c. Tres octavos

4. ¿Como se escribe la fracción cinco medios?
 - a. $\frac{5}{2}$
 - b. $\frac{5}{5}$
 - c. $\frac{2}{5}$

5. El numerador en una fracción indica:
 - a. Número de partes que se toman de la unidad.
 - b. Número de unidades disponibles.
 - c. Número de opciones disponibles.

Nota. Estas fueron las preguntas de tipo de definición y concepto, las cuales fueron especialmente diseñadas para evaluar las ideas previas de los estudiantes sobre el número racional como fracción Fuente propia.





Por otro lado, las preguntas del 6 al 8 se incluyeron para abordar las dificultades en la representación gráfica de los números racionales, según lo mencionado por Fandiño (2008). Estas preguntas, la 6 de tipo de correspondencia y la 7 – 8 de identificación con selección múltiple y única respuesta; pusieron a prueba la capacidad de los estudiantes para relacionar fracciones con su representación gráfica, identificando posibles errores como

tomar partes sombreadas como numerador y partes sin sombreadas como denominador, o viceversa. También se evaluó si los estudiantes podían dividir figuras de manera equivalente para representar fracciones de manera gráfica. Estas preguntas se centraron específicamente en las dificultades relacionadas con la representación gráfica y simbólica de las fracciones.

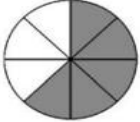
Tabla 6

Preguntas 6 - 8 del Test Diagnóstico aplicado a los estudiantes.

6. A continuación, relaciona cada fracción con su representación gráfica




	$\frac{7}{10}$
	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{5}$
	$\frac{5}{8}$

7. ¿Qué fracción se está representando?



a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{3}$ c. $\frac{5}{8}$ d. $\frac{8}{5}$

8. ¿Cuál es la representación gráfica de $\frac{2}{5}$?

a.  b.  c. 

Nota. Estas preguntas buscaban evaluar si los estudiantes podrían realizar operaciones con fracciones utilizando elementos de música como ayuda visual. Fuente propia.

Finalmente, las preguntas 14 y 15 cuyo tipo son de relación entre conceptos usando así mismo el tipo de pregunta de selección múltiple con única respuesta, están empalmadas con la categoría de didáctica a través de la música, ya que se utilizan elementos musicales para abordar las representaciones gráficas y simbólicas del número racional como fracción. Aunque estas preguntas no fueron el foco principal de la investigación, fueron parte del desarrollo de la secuencia didáctica, lo que permitió explorar cómo la música puede influir en el aprendizaje de los estudiantes en este contexto específico.

Tabla 8.


Preguntas 14 – 15 del Test Diagnóstico aplicado a los estudiantes.

14. ¿Cuál de las siguientes figuras musicales representa a la fracción $\frac{1}{4}$?

a. 

b. 

c. 

15. ¿Cuál de las siguientes fracciones es representada por la figura musical ?

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{4}$

c. $\frac{1}{8}$

Nota: en esta tabla podemos ver las preguntas 14 y 15 cuyo tipo son de relación entre conceptos y están empalmadas con la categoría de didáctica a través de la música. Fuente propia.

El test diagnóstico se aplicó a uno de los ocho grupos que cursan quinto grado en el colegio Summerhill School, escogido de esta manera dado que es en este grado en que se

aborda con mayor dificultad el uso de las fracciones en diferentes contextos, aun así, se aclara que la secuencia didáctica puede ser aplicada a los diferentes grados que contienen en su malla curricular el concepto y uso de las fracciones.

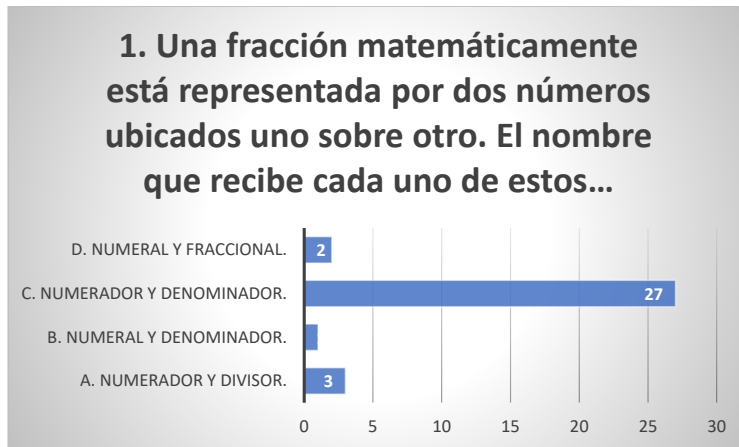
Este curso presenta estudiantes típicos de dicho grado, con ninguna característica especial, por lo que es una muestra representativa, dado que de la muestra fue aplicada a 33 estudiantes de un total de 288 que hay en quinto grado, tomando así el 11.5% del total de la población en grado quinto.

A partir de lo descrito en el marco metodológico acerca del test diagnóstico y la aplicación de éste a los estudiantes, se describe en la tabla 9 el porcentaje de acierto de cada pregunta. A los participantes se les pidió que escribieran si respondían las preguntas al azar, esas preguntas se tomaron como incorrectas.

En los resultados obtenidos en las preguntas 1 a 5 y 9, se evidencia la carencia en la concepción del número racional como fracción al igual que su comunicación, pues quienes no acertaron en estas respuestas, no reconocen las partes del objeto matemático ni su correcta lectura. La pregunta con mayor dificultad de este grupo fue la número 4, en donde se pide a los estudiantes que escojan la representación simbólica de una fracción dada en lenguaje escrito, encontrando así una de las dificultades que se aborda en la secuencia didáctica. En la pregunta número 2, cuyo porcentaje de acierto también fue menor que en las otras del mismo grupo, los estudiantes dan muestra de la dificultad a la hora de tomar una representación simbólica de la fracción e identificar sus partes, lo cual demuestra que es necesario implementar una secuencia que mejore los procesos de aprendizaje de la representación simbólica de este objeto matemático. A continuación, desglosaremos cada una de las preguntas de este grupo con su respectiva explicación y gráfica.

Figura 1.

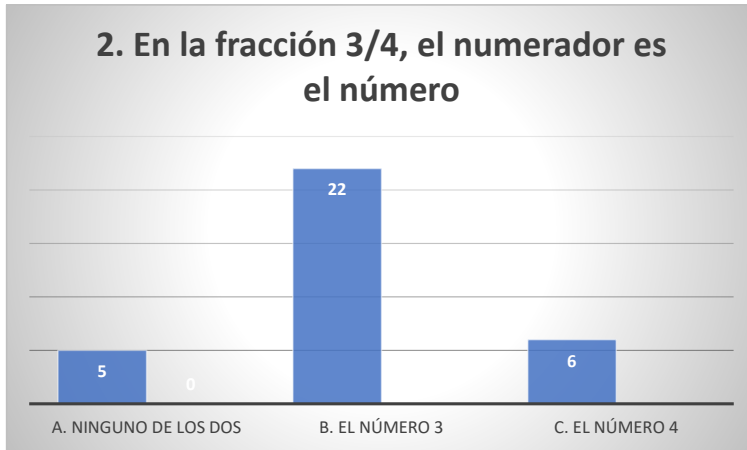
Gráfica de resultados de la pregunta 1, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 88% de los estudiantes respondió correctamente esta pregunta, lo que indica que la mayoría comprende que los dos números en una fracción se llaman numerador y denominador. Esta alta tasa de acierto sugiere que los estudiantes tienen una comprensión básica de los términos relacionados con las fracciones.

Figura 2.

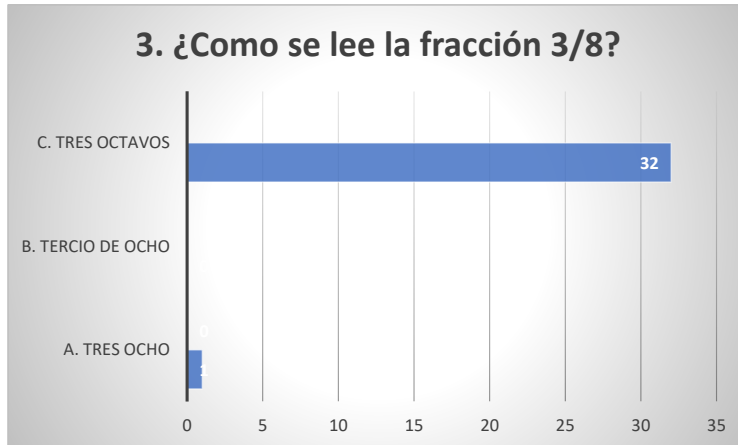
Gráfica de resultados de la pregunta 2, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 67.74% de los estudiantes eligió correctamente el numerador como el número 3 en la fracción $3/4$. Aunque la mayoría respondió correctamente, este porcentaje es un poco más bajo en comparación con otras preguntas, lo que podría indicar que algunos estudiantes tienen dificultades con la identificación específica de las partes de una fracción.

Figura 3.

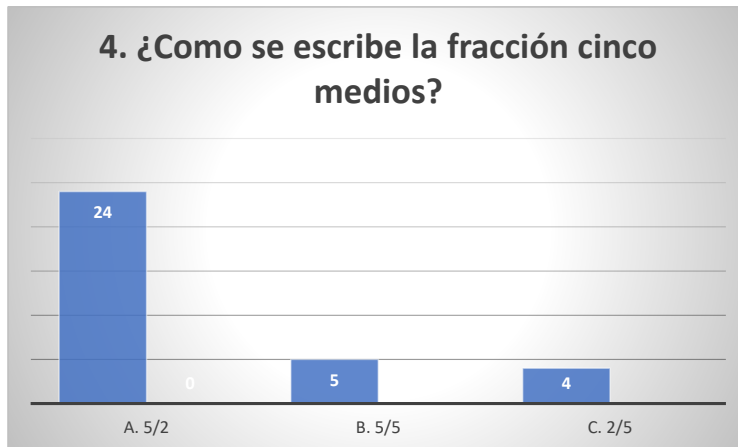
Gráfica de resultados de la pregunta 3, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 96.77% de los estudiantes respondió correctamente esta pregunta, lo que indica que la mayoría comprende cómo leer una fracción en términos de partes y el total. Esta alta tasa de acierto sugiere una buena comprensión de la lectura de fracciones entre los estudiantes.

Figura 4.

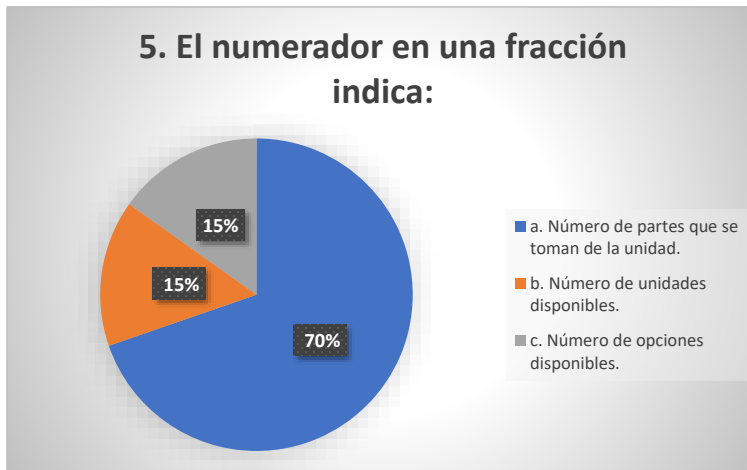
Gráfica de resultados de la pregunta 4, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 74.19% de los estudiantes eligió la respuesta correcta, lo que indica una comprensión adecuada de cómo escribir la fracción cinco medios. Sin embargo, un porcentaje significativo de estudiantes no seleccionó la respuesta correcta, lo que sugiere cierta confusión con la representación adecuada de esta fracción.

Figura 5.

Gráfica de resultados de la pregunta 5, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



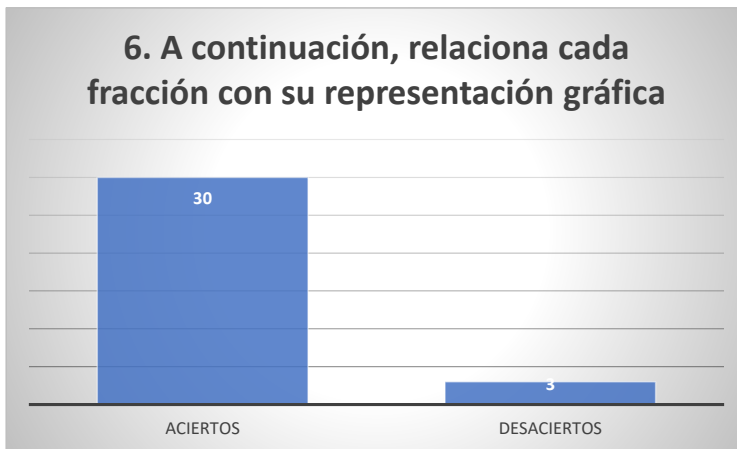
El 70.97% de los estudiantes respondió correctamente esta pregunta. Aunque la mayoría comprende el papel del numerador en una fracción, aún hay un porcentaje no despreciable que eligió respuestas incorrectas, lo que sugiere que algunos estudiantes podrían tener una comprensión limitada de este concepto.

En el grupo de preguntas enfocadas a la representación gráfica del número racional como fracción (numerales 6 a 8) se hace visible la falencia que tienen los estudiantes al identificar qué porción representa las partes y qué porción representa el total de partes, por lo que, por ejemplo, en el numeral 7 confunden la representación simbólica a partir de la representación gráfica dada, en el numeral 8, la dificultad está en confundir la representación gráfica, dada una representación simbólica de las fracciones. Mediante la observación se pudo identificar que los estudiantes que presentaron estas dificultades, en el numeral 6, dado que es un ejercicio de unir columnas, tendían a escoger las respuestas

descartando a partir de la primera solución. A continuación, se presentan las gráficas, datos y explicación pertinente a cada una de estas preguntas.

Figura 6.

Gráfica de resultados de la pregunta 6, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



Dado que el porcentaje de acierto para esta pregunta es del 93.55%, se puede inferir que la gran mayoría de los estudiantes pudo relacionar correctamente las fracciones con sus representaciones gráficas, demostrando una comprensión adecuada de cómo visualizar las fracciones.

Figura 7.

Gráfica de resultados de la pregunta 7, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 80.65% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta. Esto indica que la mayoría de los estudiantes pudo identificar correctamente la fracción representada en la imagen. Sin embargo, un porcentaje significativo de estudiantes eligió respuestas incorrectas, lo que sugiere que algunos podrían haber tenido dificultades para interpretar la representación gráfica de la fracción.

Figura 8.

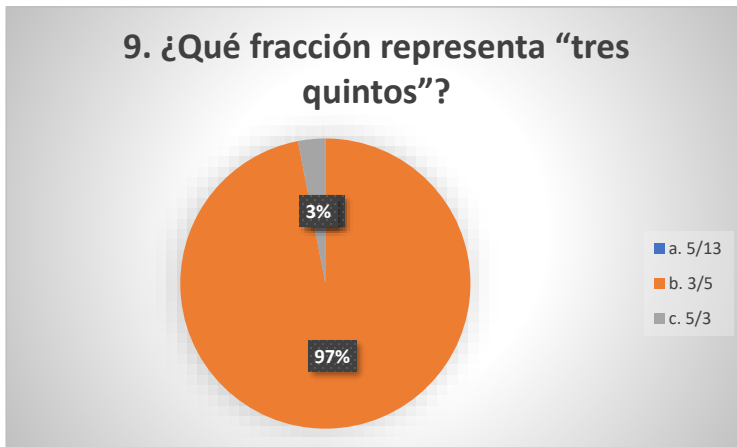
Gráfica de resultados de la pregunta 8, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 83.87% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta. Esto indica que la mayoría de los estudiantes pudo identificar correctamente la fracción representada en la imagen. Sin embargo, un porcentaje significativo de estudiantes eligió respuestas incorrectas, lo que sugiere que algunos podrían haber tenido dificultades para interpretar la representación gráfica de la fracción.

Figura 9.

Gráfica de resultados de la pregunta 9, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.

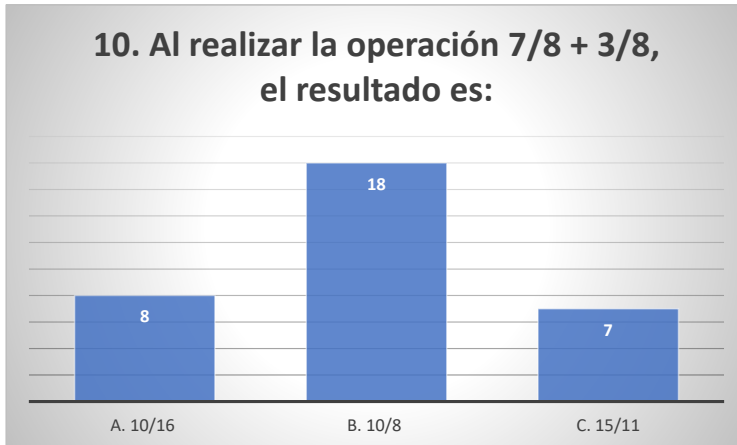


El 96.77% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, lo que sugiere que la gran mayoría comprendió adecuadamente la representación de la fracción "tres quintos".

Respecto al grupo de preguntas 10 - 13 enfocadas a la suma y resta de fracciones homogéneas, se puede evidenciar que, dada la representación simbólica de las fracciones, los estudiantes confunden el algoritmo de la operación y las partes del objeto matemático en sí, dificultando así el desarrollo del ejercicio. A continuación, las gráficas pertinentes a estas preguntas para corroborar los datos hallados.

Figura 10.

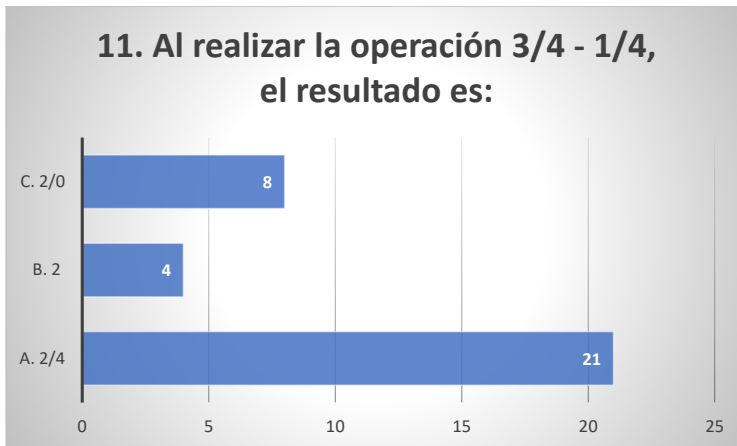
Gráfica de resultados de la pregunta 10, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 54.84% de los estudiantes eligió la respuesta correcta. Sin embargo, un porcentaje significativo de estudiantes seleccionó respuestas incorrectas, lo que sugiere que algunos podrían haber tenido dificultades para realizar la suma de fracciones.

Figura 11.

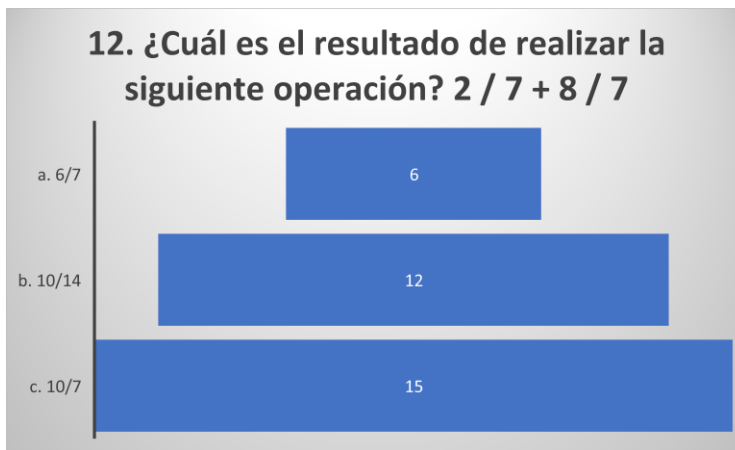
Gráfica de resultados de la pregunta 11, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 64.52% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta. Sin embargo, es importante destacar que $2/4$ se puede simplificar a $1/2$, lo que significa que la respuesta estaba dada sin simplificar y muestra que un porcentaje importante de los estudiantes se les dificulta la operación entre fraccionarios.

Figura 12.

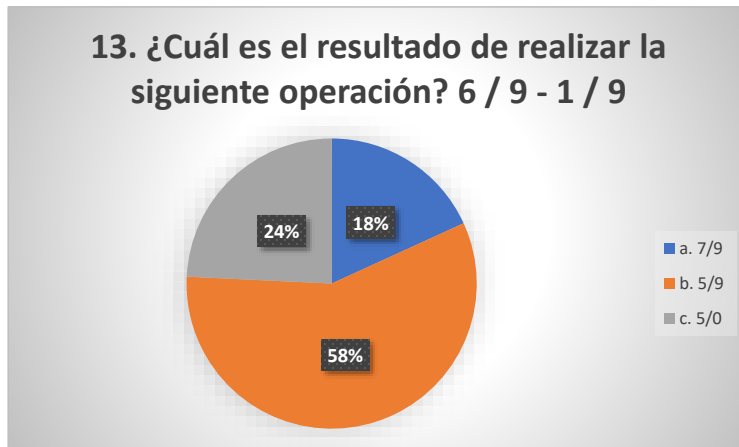
Gráfica de resultados de la pregunta 12, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 48.39% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, lo que sugiere que hubo una comprensión mixta de cómo realizar la suma de fracciones con denominadores comunes. Es posible que algunos estudiantes hayan tenido dificultades para sumar los numeradores mientras mantenían el denominador común. Esto podría indicar una falta de comprensión sobre cómo operar con fracciones con el mismo denominador, especialmente en términos de combinar los numeradores.

Figura 13.

Gráfica de resultados de la pregunta 13, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



El 58.06% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, lo que implica que hubo una comprensión media de cómo realizar la resta de fracciones con denominadores comunes. Es posible que algunos estudiantes hayan tenido dificultades para restar los numeradores mientras mantenían el denominador común. Esto podría indicar una falta de comprensión sobre cómo operar con fracciones con el mismo denominador, especialmente en términos de combinar los numeradores.

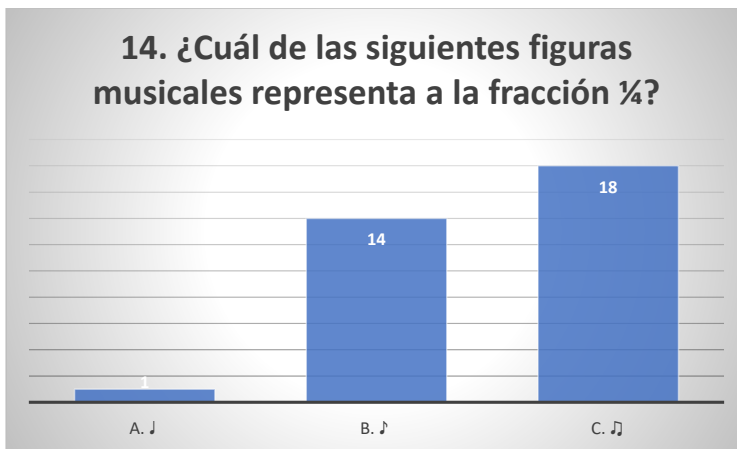
En las preguntas 14 y 15 donde se aborda la categoría de relación entre música y matemáticas, los resultados revelan una notable dificultad en la representación de fracciones mediante figuras en el pentagrama musical y viceversa por parte de los estudiantes de quinto grado del colegio. El bajo porcentaje de aciertos, apenas el 3,23%, indica una comprensión limitada y desafiante en cuanto a la relación entre las fracciones y su representación musical. Lo cual es apenas lógico pues aún no han sido participes de la

integración curricular propuesta de la enseñanza de los números racionales como fracción por medio de la música.

A continuación, se relacionan las gráficas correspondientes a estas dos preguntas y su explicación pertinente, permitiéndonos observar las falencias en esta área de manera útil para abrirnos paso a cumplir el segundo objetivo específico de esta investigación. “Analizar la correlación entre el conocimiento de la música y los números racionales fraccionarios, respecto a las habilidades de representación gráfica y simbólica que pueden desarrollarse, para dar solución a las dificultades detectadas”.

Figura 14.

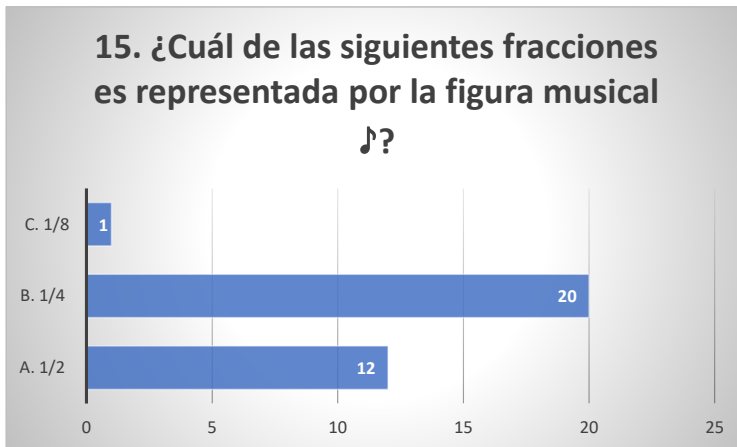
Gráfica de resultados de la pregunta 14, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



Solo el 3.23% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta. Esto indica una dificultad significativa para relacionar las figuras musicales con las fracciones correspondientes, ya que estos aún no están familiarizados con la forma en que las figuras musicales pueden representar fracciones matemáticas.

Figura 15.

Gráfica de resultados de la pregunta 15, del test diagnóstico aplicado a los estudiantes.



Al igual que en la pregunta anterior, solo el 3.23% de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, lo que sugiere una comprensión limitada de la relación entre las figuras musicales y las fracciones. Es posible que los estudiantes no reconozcan la equivalencia entre la duración de la nota musical y la fracción matemática correspondiente. Esto indica una falta de familiaridad con la notación musical y su relación con los conceptos numéricos.

A continuación, se presenta una tabla con los resultados generales del test diagnóstico, donde se presenta el número de la pregunta junto con el porcentaje de aciertos obtenido en cada una y su clasificación.

Tabla 9*Porcentaje de acierto por pregunta.*

# Pregunta	Porcentaje de acierto	Tipo de pregunta
1	83,87	Conceptual
2	67,74	Conceptual
3	96,77	Conceptual
4	74,19	Conceptual
5	70,97	Conceptual
6	93,55	Correspondencia
7	80,65	Representación
8	83,87	Representación
9	96,77	Numérica
10	54,84	Numérica
11	64,52	Numérica
12	48,39	Numérica
13	58,06	Numérica
14	3,23	Musical
15	3,23	Musical

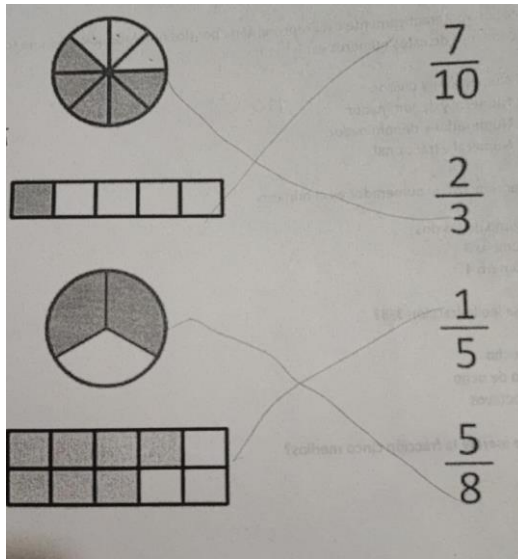
Mediante la observación se evidenció que algunos estudiantes no solo no reconocían las partes de la fracción, como en las preguntas 1 a 5, además se les dificultaba identificar su correcta representación, lo cual se expone en las preguntas 6 a 8. Si bien no son la mayoría quienes no aciertan, es justamente ese conjunto de estudiantes el que se quiere abordar con la secuencia didáctica, para que de esa manera les sea más fácil aprender el objeto matemático. Además, en las preguntas 10 a la 13 los estudiantes se confundían al realizar las operaciones planteadas, el conjunto de estudiantes con mayor dificultad tendía a

responder al azar. En las preguntas 14 y 15 se evidencio una puntuación muy baja en la mayoría, debido a la desarticulación que existe actualmente entre la enseñanza de las matemáticas y la música (específicamente en el tema de los números fraccionarios), por ello el motivo de esta investigación.

Al realizar el test se puede corroborar que los estudiantes tienen dificultades conceptuales en la representación gráfica puesto que, como se describe en la subcategoría de dificultades en la representación de números racionales, los estudiantes tienden a tomar el número de partes como la sección sombreada de la representación gráfica y la sección sin sombrear como el todo, o denominador. Como se evidencia en el punto número 6, algunos estudiantes no reconocen la forma de representar gráficamente las fracciones y confunden también su simbología.

Figura 16.

Punto 6 del test diagnóstico.

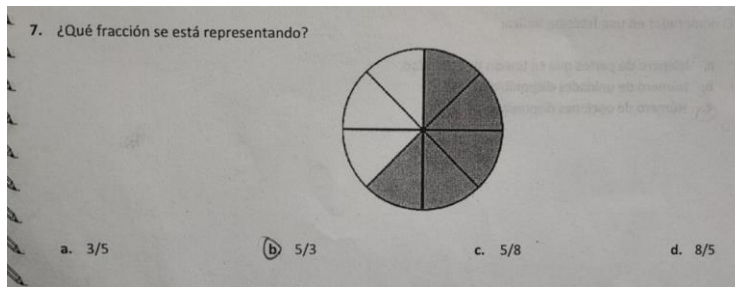


Nota: En esta figura se evidencia como los estudiantes no reconocen la forma de representar gráficamente las fracciones y confunden también su simbología. Fuente propia.

En el numeral 7, se observan cómo los estudiantes elegidos, no toman la parte sombreada de la gráfica como numerador y el total de partes como denominador como es la forma correcta, por el contrario, como se mencionó en el ejercicio anterior, toman la parte sin sombrear como numerador y la parte sombreada como denominador.

Figura 17.

Punto 7 del test diagnóstico.

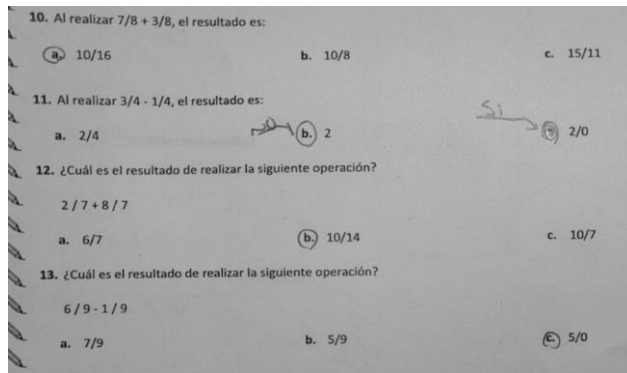


Nota: en esta figura se evidencian los problemas que los estudiantes presentan en cuanto a identificación de las partes del número racional fraccionario y su graficación. Fuente propia.

De igual manera, se mencionó en la categoría de problemas de aprendizaje que los estudiantes tienden a sumar o restar tal y como lo hacen con los números enteros, sumando o restando los numeradores y denominadores entre sí, respectivamente. Algunos de los estudiantes seleccionados, en el desarrollo de los numerales 10, 11, 12 y 13 muestran dicha dificultad al sumar de la manera descrita. Lo que justamente se aborda con la secuencia didáctica, si bien los estudiantes presentan dificultad al desarrollar el algoritmo de las operaciones entre fracciones, al emplear símbolos musicales, no son las fracciones como tal las que están sumando o restando, son elementos musicales los que agrupan para obtener uno de la unión de los otros, de esta manera el elemento musical final, se convertirá en la fracción que da solución al problema inicial.

Figura 18.

Preguntas 10 - 13 del test diagnóstico aplicado.



Nota: En esta figura se evidencia las falencias de los estudiantes al sumar y restar fraccionarios. Fuente propia.

Así nuestro objetivo de “Identificar las dificultades presentes en los estudiantes de quinto grado con las habilidades de representación gráfica y simbólica de los números racionales fraccionarios”, fue alcanzado, evidenciando por medio del test sus falencias y fortalezas mediante las cuales se pretende desarrollar las secuencias didácticas integrando la enseñanza de los números racionales fraccionarios con las representaciones musicales y las motivaciones que esta última nos brinda.

1.1.2 Objetivo II

El análisis de la correlación entre el conocimiento de la música y la comprensión de los números racionales fraccionarios se basa en los resultados obtenidos en el test diagnóstico aplicado a los 33 estudiantes regulares de quinto grado en la institución educativa Summerhill School. Se observa que las dificultades en la representación gráfica y

simbólica de las fracciones pueden subsanarse por medio de la integración entre las matemáticas y la música en el proceso educativo actual.

A continuación, se relaciona la tabla de resultados de la exploración de los textos que seleccionamos en cuanto a la enseñanza de las matemáticas por medio de la música y de la música y el objeto matemático, específicamente sobre el número racional como fracción.

Tabla 10.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 1.

2	<p>http://bd.usegioarbol.edu.co/2233/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=14360770&lang=es&site=ehost-live</p>	<p>From Music to Mathematics: Exploring the Connections by Gareth E. Roberts. BALTIMORE: JHMS HOPKINS UNIVERSITY PRESS</p>	<p>Del Cerro Santamaría, G. (2020). From Music to Mathematics: Exploring the Connections by Gareth E. Roberts. BALTIMORE: JHMS HOPKINS UNIVERSITY PRESS, 2016. 301 PP., US \$41.88, ISBN-10: 1421419180, ISBN-13: 978-1421419183. Mathematical Intelligencer, 42(2), 85-88. https://bd.usegioarbol.edu.co/2289/10.1007/s00033-019-09933-4</p>	<p>Internacional</p>	<p>From Music to Mathematics in this expanding transdisciplinary field - one that can be approached from a wide variety of perspectives - Gareth E. Roberts's work From Music to Mathematics: Exploring the Connections I, which is intended to serve as a university textbook, offers the content of a two-semester course on music and mathematics taught by the author. Roberts's work is about finding the mathematics in certain music and discovering how we can mathematically express and explain the structure of musical ideas and language. Roberts points here to the high complexity and multiplicity of the connections between mathematics and music and also to the potential openness of mathematics to indeterminacy and choice.</p> <p>Su utilidad radica en la explicación que ofrece sobre la relación entre la música y las matemáticas y el cómo explicar ciertas estructuras musicales mediante la matemática.</p>
3	<p>http://bd.usegioarbol.edu.co/2233/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=12757953&lang=es&site=ehost-live</p>	<p>The integration of music and mathematics education in Catalonia and England: perspectives on theory and practice.</p>	<p>Wladet, L., Hilton, C., Casals, A., Saunders, J., Camillo, C., Henley, J., González-Martin, C., Prat, M., & Welch, G. (2018). The integration of music and mathematics education in Catalonia and England: perspectives on theory and practice. Music Education Research, 20(1), 71-82. https://bd.usegioarbol.edu.co/2289/10.1080/14613808.2017.1219055</p>	<p>Internacional</p>	<p>The relationship between music and mathematics has often been the subject of discussion, both inside and outside the field of education. As part of an exciting project on a European scale, the paper explores the changing contexts in Catalonia (Spain) and England (UK) in relation to the integrated approach to the teaching of music and mathematics. We analyse three areas: academic literature, the curriculum frameworks and publications and resources prepared by and for teachers. Our findings suggest that due to the more favourable attitude towards crosscurricular approaches in education, more progress has been made in England, in terms of developing resources to support an integrated approach to the teaching of music and mathematics, than in Catalonia. Nonetheless, teachers in both locations are very interested in developing these approaches. Although there is a need for further teacher training and support, there is evidence of progress already being made in schools.</p> <p>Su importancia en el proyecto de grado es la relación que marca entre las matemáticas y la música, tanto dentro como fuera del campo de la educación, además del enfoque integrado entre la enseñanza de las matemáticas y la música y el avance que este tipo de enseñanza genera en la sociedad.</p>
4	<p>http://bd.usegioarbol.edu.co/2233/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=123321703&lang=es&site=ehost-live</p>	<p>Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música.</p>	<p>Montiel Hernández, M. (2017). Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música. Foro de Educación, 15(22), 1-30. https://bd.usegioarbol.edu.co/2289/10.14515/foe.532</p>	<p>Internacional</p>	<p>En el presente trabajo se presenta un reporte y un análisis de una experiencia interdisciplinaria que se llevó a cabo a través de un programa especial de fomento a modelos de esta naturaleza. La propuesta de colaboración entre los cursos Análisis Postonal de la Escuela de Música de la Universidad Estatal de Georgia (GSU) en los Estados Unidos y Teoría Matemática de la Música del Departamento de Matemáticas y Estadística de la misma universidad, fue seleccionada en un concurso sobre el tema de enseñanza interdisciplinaria integrada por parejas. Este artículo consiste en una revisión de algunos antecedentes documentados de esta combinación particular a nivel universitario, una descripción de los contenidos de los dos cursos y de los participantes en este modelo piloto, así como en un análisis de datos recopilados al final del curso. Una entrevista colectiva fue videograda y el análisis de la información en general fue llevado a cabo de acuerdo con un marco conceptual adaptado a esta combinación novedosa de disciplinas. Se buscó en todo momento que el análisis y las conclusiones se circunscribieran a parámetros concretos para poder detectar, si fuera el caso, las características precisas de la colaboración que contribuyeran al realce de los procesos de aprendizaje y enseñanza en ambas disciplinas.</p> <p>Es útil dado que menciona el cambio en el proceso de aprendizaje y enseñanza tanto en música como en matemáticas al interactuar entre ellas.</p>

Estas fuentes internacionales ofrecen una perspectiva integral sobre la relación entre la música y las matemáticas, así como sobre enfoques integrados para la enseñanza de ambas disciplinas, desde la teoría hasta la práctica.

Tabla 11.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 2.

<p>9</p> <p>http://bd.usergioarboleda.edu.co/2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=126605189&lang=es&site=ehost-live</p>	<p>The impact of participation in music on learning mathematics.</p>	<p>Holmes, S., & Hallam, S. (2007). The impact of participation in music on learning mathematics. <i>London Review of Education</i>, 15(3), 425-438. https://bd.usergioarboleda.edu.co/2289/10.18546/LRE.15.3.07</p>	<p>Internacional</p>	<p>Music psychologists have established that some forms of musical activity improve intellectual performance, spatial-temporal reasoning and other skills advantageous for learning. In this research, the potential of active music-making for improving pupils' achievement in spatial-temporal reasoning was investigated. As spatial-temporal skills are considered to be high-level mathematical abilities, this study also aimed to explore if learning music might have an effect on pupils' achievement in mathematics, and whether spatial-temporal reasoning plays a role in this process. The study had a quasi-experimental design in which groups of children aged 4 to 7 participated in a music programme containing a variety of musical, predominantly rhythmical, activities. Parallel classes made up control groups. Throughout the intervention, pupils' attainment in mathematics, reading, writing and spatial-temporal reasoning was recorded and compared between the music and control groups. The findings of the project supported the hypothesis that music instruction has an impact on the development of spatial-temporal skills. A statistically significantly greater progression was observed in most of the intervention groups, as compared in all periods of measurement to the control groups. The attainment in general mathematics did not always differ between the intervention and control groups but the analyses provided evidence of a consistent and statistically significant enhancement in learning mathematics between the youngest participants of the programme. This knowledge could inform pedagogical practice, while further research in this area could offer more insight into the association between music and mathematics.</p>	<p>En este artículo se evidencia la mejora en el rendimiento intelectual mediante el manejo de la música como herramienta de aprendizaje para las matemáticas.</p>
<p>10</p> <p>http://bd.usergioarboleda.edu.co/2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=12707106&lang=es&site=ehost-live</p>	<p>Universal language of maths and music.</p>	<p>Du Sautoy, M. (2004). Universal language of maths and music. <i>TES: Times Educational Supplement</i>, 4574, 24.</p>	<p>Internacional</p>	<p>Views the bond between mathematics and music that could be concretized if schools combine such disciplines in the curricula. Recognition of the structures in mathematics as one that provides a wonderful source of ideas for composition; Involvement of the same area of the brain that does mathematics and such activated by listening to music; Benefit of learning music during adolescence on mathematical development at this stage.</p>	<p>Este artículo es de gran utilidad dado que con él se podrá explicar la correlación entre los objetos del conocimiento de la música y de las matemáticas.</p>

Estas dos fuentes internacionales, resaltan la relación entre la música y las matemáticas, mostrando cómo la instrucción musical puede influir positivamente en el rendimiento académico en matemáticas y viceversa. Estos hallazgos respaldan la integración de ambas disciplinas en la educación para enriquecer la experiencia educativa y promover un aprendizaje más completo.

Tabla 12.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 3.

<p>12</p> <p>http://bd.uscigoiarfolede.edu.co/2231/login.aspx?direct=true&siteId=16532461&lang=es&site=ehost-live</p>	<p>La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula.</p>	<p>Casals Ibañeta, A., Camillo Aguilera, C., & González-Martin, C. (2014). La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula. <i>Revista Electrónica de LEEME</i>, 34, 1-17.</p>	<p>Internacional</p>	<p>Es bien conocida la estrecha e histórica relación entre música y matemática. De hecho, numerosos músicos y científicos han puesto de manifiesto las conexiones existentes entre ambas disciplinas. En contraposición, existen muy pocas aportaciones, experiencias y materiales didácticos que vinculen ambas disciplinas en el medio escolar, especialmente en el contexto español. En el presente artículo se ilustra esta situación exponiendo, por un lado, el estado de la cuestión a nivel internacional y, por otro, la escasa producción académica en castellano. Partiendo de esta realidad, se presenta un proyecto europeo, el European Music Portfolio: Sounding Ways into Mathematics, que precisamente busca cubrir este déficit utilizando una perspectiva pedagógica que supere la estrechez disciplinar aún predominante. En base a las experiencias escolares existentes, dicho proyecto se propone perfilar buenas prácticas, crear materiales y actividades, y diseñar cursos de formación del profesorado a nivel europeo. Finalmente, el artículo termina discutiendo en torno al interés y al potencial que contiene el proyecto dado el contexto sociopolítico y el escenario educativo españoles actuales.</p>	
--	--	---	----------------------	--	--

Esta tabla refiere un artículo internacional que destaca la relación histórica y estrecha entre la música y las matemáticas, subrayando cómo varios músicos y científicos han identificado conexiones entre ambas disciplinas. Sin embargo, señala que hay una escasez de recursos y experiencias educativas que integren la música y las matemáticas en el entorno escolar, especialmente en el contexto de habla hispana.

Tabla 13.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 4.

<p>18</p>		<p>Música y matemáticas en educación primaria</p>	<p>Liem, V. (2011). Música y Matemáticas en educación primaria. <i>Suma</i>, 66, 107-112.</p>	<p>Nacional</p>	
<p>19</p>	<p>https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/45276/montiel_wilhelmi.pdf?sequence=1&isAllowed=y</p>	<p>Funciones semióticas para el análisis de procesos de estudio integrados de matemáticas y música en la universidad</p>	<p>Montiel, M., & Wilhelmi, M. R. (2017). Funciones semióticas para el análisis de procesos de estudio integrados de matemáticas y música en la universidad.</p>	<p>Internacional</p>	<p>En el contexto de dos cursos universitarios que integran matemáticas y música se utiliza el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) y, en particular, su componente teórico de las funciones semióticas, en el análisis de la práctica educativa a partir de las producciones escritas y orales de los estudiantes. En el documento se describen las competencias matemáticas previstas a través de esta enseñanza interdisciplinaria, sin tratar las metas musicales. Se emplean las funciones semióticas con la finalidad de usar sus categorías para identificar tanto el aprendizaje matemático como los conflictos de significado sobre el contenido matemático</p>

En la tabla observamos dos recursos uno de origen nacional y otro internacional, ambos ofrecen perspectivas sobre cómo integrar la música y las matemáticas en diferentes

niveles educativos, desde la educación primaria hasta la universidad, y destacan la importancia de este enfoque interdisciplinario para el aprendizaje y la enseñanza de ambas disciplinas.

Tabla 14.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 5.

21	http://uvadoc.uva.es/handle/10324/3221	Educación, Música Y Matemáticas: Un Triángulo Afinado En Armonía.	Pérez de la Cruz, C. (2013). Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía.	Internacional	Establecer una relación entre la música y las matemáticas parte de un interés didáctico que busca como objetivo principal poder usar las cualidades más favorables de una de estas materias, en términos de enseñanza – aprendizaje, para ser aplicadas en la otra. Ambas pueden compartir esta simbiosis. La más buscada (no lo negamos) es aquella que permite aprovechar la buena aceptación, atractivo y motivación que ejerce la música sobre las personas, para aplicarla a la necesidad (menos atractiva) de adquirir conocimientos matemáticos. Para muchos niños pudiera ser de gran ayuda esta relación entre las matemáticas y la música, teniendo en cuenta la dificultad que para algunos supone la disciplina matemática. Hoy tienen a su disposición ayudas pedagógicas que eran inimaginables para su generación predecesora. Estamos, por tanto, en un nuevo proceso evolutivo de la enseñanza. Quizá el más significativo y veloz que jamás haya conocido la escuela. Contribuimos aquí, con este pequeño grano de arena, que esperamos sirva, al menos, para la reflexión y sensibilización del lector interesado
----	---	--	--	---------------	--

En resumen, este recurso internacional propuesto en la tabla, aboga por la integración de la música y las matemáticas en el ámbito educativo como una forma de mejorar la comprensión y el interés de los estudiantes en las matemáticas, y promover un proceso de enseñanza más efectivo y significativo.

Tabla 15.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 6.

24	http://www.gibbs.if.usp.br/~crochik/feo/escalas/escalas-fourier-dyegoraphaelalvesdossantos.pdf	MATEMÁTICA E MÚSICA	Alves dos Santos, D. R. A. MATEMÁTICA E MÚSICA	Latinoamericano	Este artículo presenta una descripción de la relación entre las matemáticas y la música, señalando hechos aspectos significativos relacionados con la historia de la música y la participación directa de las matemáticas en su construcción. También traerá un análisis del sonido musical, utilizando los principios de Fourier.
25	https://www.repositorio.ufpa.br/jatsRepo/447/44745615019/html/index.html	Estudio de fracciones en contextos sonoros	Conde, A., Parada, S., & Liem, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. <i>Actualidades Investigativas en Educación</i> , 16(2), 418-439.	Latinoamericano	En este ensayo resaltamos los vínculos cognitivos entre las matemáticas y la música, que pueden favorecer procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la matemática escolar. Las actividades exhibidas provienen de una investigación que promueve experiencias sensoriales en el campo rítmico para favorecer la construcción de nociones matemáticas. Dichas actividades posibilitan un engranaje armónico entre las matemáticas y la música convergentes en el tiempo y el sonido como los objetos de estudio común entre estas disciplinas. El análisis de la investigación que aquí reportamos es producto de la aplicación de las actividades en diferentes programas de formación de profesorado de México y Francia, alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos interdisciplinarios. Este análisis se desarrolló desde tres categorías referentes a las nociones de unidad relativa, relación parte-parte y equipartición, las cuales son nociones fundamentales para el estudio de las fracciones en la matemática escolar. Encontramos que la enseñanza con enfoque integrador requiere no solo conocimientos especializados, sino un cambio de creencias en torno a las opiniones del profesorado sobre la organización del currículo, su enseñanza y la manera en que aprende la población estudiantil. Un aporte de esta experiencia es ofrecer a docentes elementos teóricos y didácticos para el estudio de las fracciones en contextos interdisciplinarios.

Los recursos mencionados en la tabla son de origen latinoamericano y ambos exploran la interrelación entre las matemáticas y la música desde diferentes perspectivas, destacando la utilidad de integrar estas disciplinas en el ámbito educativo para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y promover un entendimiento más profundo de ambos campos.

Tabla 16.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 7.

27	https://core.ac.uk/download/pdf/12341314.pdf	<p>"Una propuesta de enseñanza de la fracción y de los números racionales positivos implementando las figuras musicales. Experiencia de caso en una escuela indígena nasa"</p>	<p>Esteban, P., & Hernández, E. (2009). Una propuesta de enseñanza de la fracción y de los números racionales positivos implementando las figuras musicales. Experiencia de caso en una escuela indígena nasa.</p>	<p>Nacional</p>	<p>Durante las prácticas de enseñanza de las matemáticas y más específicamente de la fracción, surge la intención de incluir objetos musicales que permitan un entendimiento de comportamientos tanto en las matemáticas como en la música, en la que considera que las dos admiten una estrecha relación de complementación. En éste sentido se pretende que ésta propuesta se incluya en las clases de matemáticas de las escuelas de Tierradentro, en las que se genera una gran admiración por la música ancestral (flautas caucanas) y por la música de los Andes. La propuesta busca evidenciar la relación que existe entre la música y el concepto de fracción en las matemáticas, de esta forma se pretende que por medio la comprensión de una unidad musical como tal (en éste caso la redonda 0) se entienda la reciprocidad que se da entre las equivalencias de las demás figuras musicales estrictamente relacionadas con la unidad inicial. Sin embargo no solo ocurre esto con la descomposición binaria de las figuras musicales, sino también sucede lo mismo con la implementación de los compases al iniciar una obra musical. Es así como se hará una propuesta la cual incluya aspectos musicales para la enseñanza de la fracción, esto se hará a partir de la interacción con un profesor indígena de matemáticas y músico, el cual facilite la implementación de susodicha propuesta.</p>
----	---	--	--	-----------------	---

Esta tabla nos presenta un documento nacional, con una interesante propuesta educativa que busca aprovechar la relación entre la música y las matemáticas para mejorar la comprensión de los conceptos de fracción y números racionales positivos en una escuela indígena Nasa.

Tabla 17.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 8.

30	https://core.ac.uk/download/pdf/33251489.pdf	UN ACERCAMIENTO A LAS FRACCIONES POR MEDIO DE LA MÚSICA: UN PROBLEMA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE	Conde, L. (2011). Un acercamiento a las fracciones por medio de la música: un problema de enseñanza y aprendizaje.	Latinoamericano	Publicaciones actuales dejan ver el interés de los investigadores para que se aprovechen las relaciones existentes entre las matemáticas y la música en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el libro de texto de sexto grado de educación básica primaria de México (SEP, 2000), se retoma esta iniciativa y presenta la lección seis: "Matemáticas y música". En ella se proponen actividades que involucran el uso de los números fraccionarios relacionadas con las figuras musicales. En el marco de la 24va Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa se desea presentar el análisis de la lección antes mencionada, con el objetivo de exponer elementos importantes para vincular eficazmente la música en la enseñanza de las matemáticas
31	https://www.researchgate.net/profile/Maria_Andreu2/publication/277890374_Exploratory_Study_of_the_Role_of_Musical_Education_in_the_Acquisition_of_Basic_Skills_at_Primary_School_Level/links/5d9ae38d92851c2f70f21bf7/Exploratory-Study-of-the-Role-of-Musical-Education-in-the-Acquisition-of-Basic-Skills-at-Primary-School-Level.pdf	La importancia de la educación artística en la enseñanza obligatoria: la adquisición de las competencias básicas de Primaria en un centro integrado de música	Duran, M. A., & Castell, P. G. (2012). La importancia de la educación artística en la enseñanza obligatoria: la adquisición de las competencias básicas de Primaria en un centro integrado de música. <i>Revista de educación</i> , 357, 179-202.	Internacional	El objetivo de esta investigación es aportar datos sobre cómo la educación musical ayuda en la adquisición de competencias básicas de la etapa primaria. El estudio se realizó en el Centre d'Educació Primària, Secundària, Artística Oriol Martorell de Barcelona (CEPSA Oriol Martorell), centro integrado de Música y Danza con Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, donde la mitad de los alumnos cursan un extenso currículo en Música mientras la otra mitad lo hace en Danza. El estudio parte de que los dos colectivos provienen de la misma situación social, comparten el resto de su Educación Primaria, el número de horas lectivas en todas las áreas curriculares, los espacios, los profesores, las metodologías, las actividades, etc. Para llevar a término esta investigación se utilizaron los datos aportados por las pruebas de competencias básicas que realiza cada curso el Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya a todos los alumnos de Cataluña desde el curso 2000-01. Los resultados globales de la muestra en Cataluña y en centros de similares características (de ciudades de más de 100.000 habitantes y con un nivel socioeconómico alto), publicados por el Departament d'Educació, se compararon en cada una de las pruebas realizadas con el global obtenido por los alumnos de Primaria de este centro y en concreto con el resultado obtenido por los alumnos de Música.

Estos dos documentos relacionados en la tabla, uno latinoamericano y otro internacional se empalman y resaltan la importancia de integrar la música en el proceso de enseñanza de las matemáticas y cómo la educación musical puede tener un impacto positivo en el rendimiento académico de los estudiantes en la etapa primaria.

Tabla 18.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 9.

33	https://reunir.unir.net/handle/123456789/3314	Propuesta Didáctica para el aprendizaje del Bloque de Números en 1º de ESO, utilizando la Música como Recurso Didáctico	Galbete-Ahechu, E. (2015). <i>Propuesta Didáctica para el aprendizaje del Bloque de Números en 1º de ESO, utilizando la Música como Recurso Didáctico</i> (Master's thesis).	Internacional	Este trabajo pretende ofrecer una propuesta didáctica, que utiliza la música como recurso didáctico, para impartir los contenidos del bloque de números de 1º de ESO que más difíciles resultan a los alumnos. Tras la investigación bibliográfica, centrada en la evolución de las matemáticas, de la música y de la estrecha relación e influencia de ambas materias, se ha realizado un estudio de campo entre los alumnos y profesores implicados. En concreto, en dicho estudio se ha utilizado una combinación de metodología cuantitativa y cualitativa. La primera se ha basado en unos cuestionarios pasados a los alumnos de 1º de ESO y en su posterior análisis y la segunda, en cambio, en la realización de entrevistas a los profesores de matemáticas de dicho curso. Tras conocer la realidad y características de los alumnos implicados y los múltiples beneficios de la música en el proceso de enseñanza aprendizaje, en general, y en el aprendizaje de matemáticas en particular, se ha diseñado una propuesta didáctica, basada en una metodología novedosa que aúna música y matemáticas, a la que se ha denominado metodología musimática. Dado que el nivel de música de los alumnos implicados es bueno, que en general su gusto por dicha asignatura es notorio y que ha quedado probada la influencia de la música en el aprendizaje de matemáticas, se prevé que la metodología propuesta dé buenos resultados.
----	---	---	--	---------------	--

Esta tabla nos presenta un trabajo internacional que expone una propuesta pedagógica que busca mejorar el aprendizaje de los contenidos matemáticos mediante el uso creativo y efectivo de la música como recurso didáctico en el primer año de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Tabla 19.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 10

53	http://bd.usergoarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=130917771&lang=es&site=ehost-live	Mathematics Art Music Architecture Education Culture.	Shrestha, S. (2018). Mathematics Art Music Architecture Education Culture. <i>Nexus Network Journal: Architecture & Mathematics</i> , 20(2), 497–507. https://bd.usergoarboleda.edu.co:2289/10.1007/s00004-018-0371-2	Internacional	The international annual Bridges conference exploring Mathematical Connections in Art, Music, Architecture, Education and Culture was founded by Reza Sarhangi (1952-2016) in 1998 at a private liberal arts college in Kansas, Southwestern College. It is an annual conference, which has provided a remarkable multi-disciplinary model of collaboration between mathematics, arts and other cultural activities. The genuine efforts of many founding members of this organization provided an inspirational model throughout the past 20 years that has shaped the Bridges into one of the premier interdisciplinary conferences in the world. The conference has travelled across North America to Europe, and Asia, and hosts participants from dozens of countries around the world.
54	http://bd.usergoarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=87846257&lang=es&site=ehost-live	Euler's Musical Mathematics.	esic, P. (2013). Euler's Musical Mathematics. <i>Mathematical Intelligencer</i> , 35(2), 35–43. https://bd.usergoarboleda.edu.co:2289/10.1007/s00283-013-9369-5	Internacional	The article focuses on the concept of musical mathematics by Swiss mathematician Leonhard Euler. It states that Euler was driven by musical questions to consider new mathematical questions as well as introduce new approaches which characterized his most significant initiatives in physics and mathematics. It says that Euler had been in a long line of musical mathematicians which reflects to the Pythagoreans who have correlated consonant musical intervals with simple ratios.
55	http://bd.usergoarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=63219463&lang=es&site=ehost-live	Preservice Teachers' Beliefs and Attitude About Teaching and Learning Mathematics Through Music: An Intervention Study.	An, S. A., Ma, T., & Capraro, M. M. (2011). Preservice Teachers' Beliefs and Attitude About Teaching and Learning Mathematics Through Music: An Intervention Study. <i>School Science & Mathematics</i> , 111(5), 236–248. https://bd.usergoarboleda.edu.co:2289/10.1111/j.1949-8594.2011.00082.x	Internacional	This article presents exploratory research investigating the integration of music and a mathematics lesson as an intervention to promote preservice teachers' attitude and confidence and to extend their beliefs toward teaching mathematics integrated with music. Thirty students were randomly selected from 64 preservice teachers in a southern university. A 90-minute mathematics lesson integrated with a music composition activity was taught by the first author. Pre- and postquestionnaires were provided to evaluate the change in preservice teachers' attitude and beliefs toward mathematics. The results demonstrated that the mathematics lesson integrated with music had a positive effect on preservice teachers' attitude and beliefs toward mathematics teaching and learning.

La tabla presenta tres recursos internacionales que exploran la intersección entre las matemáticas y la música, en una primera instancia expone las conexiones matemáticas en el arte, la música, la arquitectura, la educación y la cultura; pasando a otro texto con preguntas musicales para abordar nuevas cuestiones matemáticas y terminando con un documento que investiga como la integración de la música en una lección de matemáticas puede influir en las actitudes y creencias de los futuros maestros hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 20.

Revisión documental de textos relacionados con la enseñanza de las matemáticas por medio de la música, fase 11

61	http://bd.usergioarboleda.edu.co/2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=13799671&lang=es&site=ehost-live	Numeracy Musical Training for school children with low achievement in mathematics.	Rodríguez, I. A., Nascimento, J. M., Voigt, M. F., & Santos, F. H. (2019). Numeracy Musical Training for school children with low achievement in mathematics. <i>Anales de Psicología</i> , 35(3), 405-416. https://bd.usergioarboleda.edu.co/2289/10.6018/analesps.35.3.340091	Internacional	El presente estudio caso-control, doble ciego, y prospectivo investigó los efectos del entrenamiento musical numérico (NMT; Numeracy Musical Training), sobre habilidades cognitivas en niños de enseñanza primaria. Participaron 42 niños de 8 a 10 años divididos en dos grupos: con Bajo Rendimiento Aritmético (N = 21), y con Rendimiento Aritmético Medio (N = 21). Los niños pasaron por dos evaluaciones, antes y después de la realización del NMT, en las cuales se aplicaron pruebas cognitivas y escalas de comportamiento, que evaluaban variables como: rendimiento escolar, CI, memoria operativa, cognición numérica, ansiedad y estrés. El NMT fue desarrollado en ocho sesiones colectivas y tuvo como objetivo estimular los sistemas de la cognición numérica e integrar conocimientos musicales básicos y representaciones simbólicas. Después de la intervención por medio del entrenamiento musical los niños de ambos grupos obtuvieron mejoras significativas en el rendimiento académico, en los sistemas de la cognición numérica y en la memoria operativa, así como una disminución de la manifestación de ansiedad a las matemáticas.
62	http://bd.usergioarboleda.edu.co/2231/login.aspx?direct=true&db=fap&AN=138068479&lang=es&site=ehost-live	EFFECTOS DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE ACTIVIDADES MUSICALES.	MATO - VÁZQUEZ, D., CHAO - FERNÁNDEZ, R., & CHAO - FERNÁNDEZ, A. (2019). Efectos De Enseñar Matemáticas a Través De Actividades Musicales. <i>Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa</i> , 22(2), 163-184. https://bd.usergioarboleda.edu.co/2289/10.12802/relime.19.2222	Latinoamericano	El propósito de este estudio es determinar los efectos a nivel cognitivo en dos grupos de estudiantes de Educación Infantil (49 sujetos de 5 y 6 años): al Grupo Experimental (GE) se le aplicaron actividades musicales relacionadas con contenidos de matemáticas durante dos meses, mientras que el Grupo Control (GC) ejecutó actividades matemáticas tradicionales. El instrumento utilizado fue un cuestionario que cumplimentaron las profesoras antes y después de poner en práctica las actividades, tras recoger --a través de notas de campo diarias-- los aprendizajes matemáticos adquiridos por los estudiantes. Para el análisis de los datos se utilizó estadística descriptiva e inferencial. Se encontraron efectos significativos y positivos en el rendimiento del Grupo Experimental en todos los ítems. Se puede concluir que utilizar la música representa una excelente alternativa en Educación Infantil, ya que tiene un impacto positivo en el aprendizaje.

En esta tabla están referenciados dos estudios uno internacional y otro latinoamericano que destacan la importancia de integrar la música en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya sea a través de entrenamiento musical específico o mediante actividades musicales relacionadas con conceptos matemáticos. Esto sugiere que la música puede ser una herramienta efectiva para mejorar el rendimiento y la actitud hacia las matemáticas en diferentes grupos de estudiantes.

Dando continuidad al desarrollo del segundo objetivo en esta fase y partiendo de las dificultades encontradas en la aplicación del test diagnóstico en el desarrollo del objetivo 1, se realiza este análisis desde cada una de las categorías dispuestas a continuación:

1. Representación Gráfica. Los resultados revelan que un porcentaje significativo de estudiantes presenta dificultades para interpretar las representaciones gráficas

de las fracciones. Como se analiza anteriormente la confusión presente entre qué parte representa las fracciones y cuál es el todo, es evidente.

2. La propuesta de utilizar elementos musicales para representar gráficamente las fracciones se basa en la idea de que, al asociar las fracciones con símbolos musicales, los estudiantes pueden superar las barreras conceptuales que enfrentan actualmente. La música, al ser un lenguaje universal, proporciona una alternativa para expresar conceptos matemáticos de manera más accesible y atractiva.
3. Representación Simbólica. Como se evidencio en el análisis de los resultados del test diagnostico anteriormente citado, una dificultad significativa en los estudiantes evaluados es reconocer y comprender la simbología de las fracciones. Este aspecto es crucial, ya que la correcta interpretación de los símbolos es fundamental para realizar operaciones y entender el significado de las fracciones.

La estrategia de incorporar la música como medio para expresar simbólicamente las fracciones busca capitalizar la capacidad de la música para transmitir información de manera no verbal. Se espera que esta aproximación facilite la comprensión de los símbolos matemáticos relacionados con las fracciones y proporcione una representación alternativa que estimule un aprendizaje más efectivo.

4. Integración de Música y Matemáticas. Los resultados analizados nos muestran en la fase 1 de esta investigación, nos muestran la falta de conexión actual entre la música y las matemáticas en el currículo escolar. La investigación busca

demostrar cómo la música puede ser una herramienta efectiva para enseñar conceptos matemáticos, específicamente los relacionados con fracciones. Autores como Santamaría (2020), Viladot et al. (2018), y Conde et al. (2016) respaldan la integración de matemáticas y música, sugiriendo que esta conexión puede mejorar el rendimiento académico y el interés de los estudiantes. La secuencia didáctica propuesta busca, por lo tanto, capitalizar esta interdisciplinariedad para abordar las dificultades identificadas.

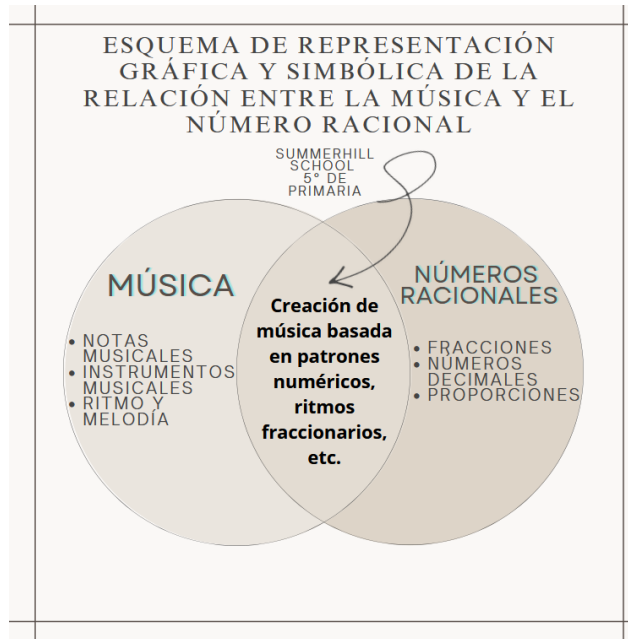
5. Desarrollo de Habilidades a través de la Música. La estrategia de emplear la música como medio didáctico se basa en la idea de que la música puede ser una herramienta poderosa para el aprendizaje, motivando a los estudiantes y mejorando su comprensión de los conceptos matemáticos.

La investigación busca analizar cómo la introducción de elementos musicales puede influenciar positivamente el proceso de aprendizaje, ayudando a los estudiantes a superar las dificultades identificadas en la representación gráfica y simbólica de los números racionales fraccionarios.

A continuación se presenta el esquema de representación gráfica y simbólica de la relación entre la música y el número racional, con el objetivo de abordar y minimizar las dificultades encontradas en la fase 1 en la institución Summerhill School.

Figura 19.

Esquema de representación gráfica y simbólica de la relación entre la música y el número racional.



Nota: esta imagen muestra el *esquema* de representación gráfica y simbólica de la relación entre la música y el número racional, que se usará para abordar y minimizar las dificultades encontradas en los estudiantes de grado quinto de la institución Summerhill School. Fuente propia.

Se propone desarrollar dicho esquema mediante la premisa “Música y Fracciones: Una Herramienta para Entender la Matemática” mostrando a los estudiantes del grado quinto las fracciones, no solo como conceptos abstractos de matemáticas; sino también como juegan un papel crucial en el mundo de la música. Por ejemplo: si deseamos

comprender cómo leer partituras, es esencial entender la relación entre la música y las fracciones. En nuestra investigación, hemos descubierto que esta conexión puede ayudar a los niños del quinto grado a superar sus dificultades con los números fraccionarios.

Pretendemos abordar este esquema basadas en investigaciones de metodologías innovadoras como lo son los estudios de (Galbete-Ahechu, 2015), que proponen el uso de nuevas metodologías, como la "metodología musimática", que combina música y matemáticas para enseñar conceptos difíciles de números, como los racionales fraccionarios. Estas metodologías pueden abordar las dificultades encontradas en la fase 1 al ofrecer un enfoque de aprendizaje más dinámico y atractivo, junto con la de (Rodríguez y otros, 2019) la cual exploran el efecto del entrenamiento musical numérico en el rendimiento académico y cognitivo de los niños en matemáticas. Es comprobado por el autor que este tipo de entrenamiento es beneficioso para abordar las dificultades específicas relacionadas con los números racionales fraccionarios.

Al estudiar y comprender la relación entre las figuras Musicales y las Fracciones, podemos encontrar que, en la música, las fracciones se utilizan para representar intervalos de tiempo más pequeños, ayudando a los músicos a comprender la duración de las notas en una melodía. Veamos cómo funciona en la siguiente imagen:

Figura 20.

Relación entre las figuras musicales y las fracciones.

NOMBRE	FIGURA	FRACCIÓN	DURACIÓN
Redonda		4 Tiempos	1
Blanca		2 Tiempos	1/2
Negra		1 Tiempo	1/4
Corchea		1/2 Tiempo	1/8
Semicorchea		1/4 Tiempo	1/16
Fusa		1/8 Tiempo	1/32
Semifusa		1/16 Tiempo	1/64

GCF Aprende Libre edu.gcfglobal.org

Nota: Esta imagen nos muestra la relación entre las fracciones y las figuras musicales. Proporcionada por (GCF Global, 2023).

Podemos determinar las siguientes especificaciones que nos serán útiles para empalmar el concepto de las fracciones y la música.

- Redondas: Estas son las unidades básicas de tiempo en la música. Para nuestros estudiantes, podemos compararlas con un número entero en matemáticas. Sin embargo, la música se compone de intervalos de tiempo más cortos, representados por fracciones.

- Símbolos Musicales: Cada símbolo musical representa una fracción del tiempo de una redonda. Por ejemplo:

- Una blanca es la mitad de una redonda.
- Una negra es la mitad de una blanca.
- Una corchea es la mitad de una negra.

Y así sucesivamente, cada símbolo dividiendo el tiempo en fracciones más pequeñas.

Aplicación en el Aula.

Al enseñar música y matemáticas de manera integrada, podemos ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor las fracciones. Al hacer que relacionen los conceptos de duración de notas musicales con fracciones matemáticas, podemos abordar las dificultades que enfrentan con los números fraccionarios en un contexto más práctico y significativo. Como lo expresa el enfoque llamado “Numeracy Musical Training” (Entrenamiento Musical Numérico) de (Rodríguez y otros, 2019). Diseñado para estimular los sistemas de cognición numérica e integrar conocimientos musicales básicos y representaciones simbólicas. Siendo este enfoque útil para abordar las dificultades en la comprensión de números racionales, ya que combina la música con conceptos matemáticos.

Mejorando el rendimiento académico, pues después de la intervención con el entrenamiento musical, tanto los niños con bajo rendimiento aritmético como los niños con rendimiento aritmético medio mostraron mejoras significativas en el rendimiento académico, incluidas las habilidades numéricas. Esto sugiere que la integración de la música y los números puede tener un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

Resultados de la Aplicación del Esquema de Representación.

Después de la implementación del esquema de representación que integra música y fracciones en el aula de quinto grado en la institución Sumerhill School, se observaron varios resultados significativos que respaldan la efectividad de esta metodología:

- Mejora en la Comprensión de Fracciones: Los estudiantes mostraron una mejora significativa en su comprensión de los conceptos de fracciones al relacionarlos con la duración de las notas musicales. Esta mejora se reflejó en su capacidad para identificar, comparar y operar con fracciones.
- Mayor Interés y Participación: Se observó un aumento en el interés y la participación de los estudiantes en las lecciones que integraban música y matemáticas. Los alumnos se mostraron más comprometidos y entusiasmados durante las actividades prácticas que involucraban la creación de ritmos y melodías utilizando fracciones.
- Transferencia de Conocimientos: Los estudiantes pudieron transferir los conceptos aprendidos en el aula de música a otras áreas del currículo de matemáticas y viceversa. Por ejemplo, aplicaron sus conocimientos sobre fracciones al resolver problemas de ritmo y compás, y utilizaron la notación musical para representar fracciones en contextos musicales.
- Desarrollo de Habilidades Creativas: La integración de música y fracciones promovió el desarrollo de habilidades creativas en los estudiantes. Fueron capaces de expresar su creatividad al componer sus propias piezas musicales utilizando fracciones para controlar la duración de las notas.

Los resultados obtenidos están respaldados por la investigación de autores como (An y otros, 2011), quienes encontraron que la integración de música y matemáticas tiene un impacto positivo en la actitud y la confianza de los estudiantes hacia las matemáticas. Además, el enfoque pedagógico utilizado se alinea con las recomendaciones de autores como (Galbete-Ahechu, 2015), quien aboga por el uso de métodos innovadores que integren música y otras disciplinas para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos difíciles.

En resumen, la correlación entre el conocimiento musical y la comprensión de los números racionales fraccionarios en los estudiantes de quinto grado en el Colegio Summerhill School es un aspecto clave que esta investigación busca explorar y aprovechar. La estrategia de enseñanza propuesta busca abordar las dificultades detectadas mediante la integración de la música en el proceso de aprendizaje matemático, capitalizando la capacidad única de la música para comunicar conceptos de manera intuitiva y atractiva. La investigación pretende demostrar cómo esta integración puede mejorar las habilidades de representación gráfica y simbólica de los estudiantes, contribuyendo así a un proceso educativo más efectivo y enriquecedor.

5.1.3 Objetivo III

En esta fase se muestra el alcance del tercer objetivo específico de esta investigación, el cual se basa en el diseño de actividades que permitan el desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza del número racional como fracción desde la música, para estudiantes con dificultades en las habilidades de la representación gráfica y simbólica. Para ello debemos iniciar retomando el concepto de secuencia didáctica.

En el ámbito educativo, una secuencia didáctica se refiere a un conjunto organizado y secuencial de actividades de enseñanza y aprendizaje diseñadas para lograr objetivos específicos de aprendizaje. Esta conceptualización se fundamenta en las ideas (Díaz-Barriga, 2015), reconocido pedagogo y experto en didáctica.

E autor destaca que una secuencia didáctica va más allá de una simple sucesión de actividades, ya que implica una planificación cuidadosa y sistemática que integra diversos elementos para promover el desarrollo cognitivo y la construcción de conocimiento significativo por parte de los estudiantes. Entre los aspectos clave que se señala como fundamentales en la elaboración de una secuencia didáctica se encuentran el organizar un plan de enseñanza estructurado y sistemático que integra objetivos de aprendizaje, contenidos curriculares, actividades de enseñanza y aprendizaje, y procesos de evaluación con el fin de promover el aprendizaje significativo y el desarrollo integral de los estudiantes.

A manera de síntesis en cuanto a los principios pedagógicos que rigen la secuencia didáctica, encontramos los basados en los enfoques del constructivismo, los cuales sostienen que los estudiantes construyen activamente su propio conocimiento a través de la interacción con el entorno y la reflexión sobre sus experiencias. En este sentido, la secuencia se diseña para promover la construcción significativa del conocimiento de la representación gráfica y simbólica del número fraccionario, brindando oportunidades para la exploración, la experimentación y la reflexión, sobre el mismo.

Otro de los principios de la secuencia didáctica tiene en cuenta la zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1978), que es el espacio entre lo que un estudiante puede hacer de forma independiente y lo que puede lograr con la ayuda de un guía o compañero más

experimentado. Se diseñan actividades que desafíen a los estudiantes dentro de su zona de desarrollo próximo, fomentando el aprendizaje colaborativo y la resolución de problemas con el apoyo del docente y de sus pares.

En este aspecto es importante también, promover la integración curricular al conectar los contenidos de matemáticas relacionados con los números fraccionarios con el arte de la música. Esto permite que los estudiantes vean las conexiones entre diferentes áreas del conocimiento y comprendan cómo los conceptos matemáticos se aplican en contextos musicales, lo que enriquece su comprensión y motivación.

Así mismo la secuencia didáctica incluye la evaluación formativa como un principio pedagógico clave. Se realizan evaluaciones continuas y formativas durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje para monitorear el progreso de los estudiantes, identificar áreas de mejora y proporcionar retroalimentación oportuna que favorezca el aprendizaje y la autoevaluación.

Podemos aprovechar la relación entre los números fraccionarios y la música para enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre ambos conceptos. A través de actividades que involucran la representación musical de fracciones y la exploración de ritmos y patrones, se facilita la comprensión de conceptos matemáticos abstractos de manera más tangible y significativa.

La idea principal es que esta secuencia didáctica utilice la música como una herramienta para representar gráfica y simbólicamente los números fraccionarios, empleando símbolos musicales y patrones rítmicos para visualizar y comprender los

conceptos fraccionarios, lo que permite a los estudiantes experimentar los números de manera sensorial y creativa.

Identificación de la secuencia didáctica

Asignatura: Matemáticas
 Grado: quinto
 Docente(s):
 Fechas:
 Horas: 4 horas y media

Problema significativo del contexto

La falta de comprensión y habilidades relacionadas con los números fraccionarios, lo que dificulta su correcta representación gráfica y simbólica.

Competencias

- * Los estudiantes de quinto grado serán capaces de comprender, representar y operar con números fraccionarios utilizando la música como herramienta didáctica.
- * Los estudiantes de quinto grado demostrarán una actitud positiva hacia las matemáticas, motivándose a sí mismos para aprender y mejorar en esta área mediante el uso de la música como herramienta pedagógica.

Saber conocer

- * Construir fracciones equivalentes mediante símbolos musicales.
- * Identificar fracciones equivalentes a otras fracciones dadas.

Saber hacer

- * Integrar conceptos de fracciones con la duración de notas musicales.
- * Crear composiciones musicales que representen fracciones específicas.
- * Relacionar símbolos musicales con la representación simbólica de fracciones.

Saber ser

- * Reflexión sobre la relación entre fracciones y música.
- * Fomento de la discusión y consolidación de aprendizajes sobre el uso de figuras musicales al abordar el número racional como fracción, promoviendo valores de cooperación y trabajo en equipo.
- * Expresión oral y escrita de las comprensiones individuales y colectivas, destacando la importancia de la expresión simbólica en el proceso de aprendizaje.
- * Reflexión escrita sobre cómo la música contribuye en la comprensión de las fracciones, incentivando la reflexión crítica y el análisis metacognitivo.

Competencia genérica 1:
 Analizar cómo las duraciones de las notas musicales se relacionan con conceptos fraccionarios, identificando similitudes y diferencias entre ambas representaciones.

Criterios de logro

- * Reforzar la conexión entre las notas musicales y las fracciones, demostrando comprensión de cómo las fracciones se representan en la música.

Competencia genérica 2:
Interpretar cómo la duración asignada a cada nota en una composición musical refleja la fracción correspondiente, demostrando comprensión mediante ejemplos concretos y explicaciones claras.

Criterios de logro

- * Emplear instrumentos musicales, software de composición musical o incluso la voz y palmas para representar composiciones fraccionales con precisión y creatividad.

Competencia genérica 3:
Relacionar los símbolos musicales con su equivalencia fraccional, argumentando cómo la notación musical puede ser utilizada como una representación visual de fracciones en una composición.

Criterios de logro

- * Crear una composición musical que utilice los símbolos musicales para representar fracciones específicas, demostrando la comprensión de la relación entre la música y las matemáticas fraccionales.

Las actividades de aprendizaje se detallan más adelante indicando el desarrollo, proceso de evaluación y recursos de cada una.

El tercer objetivo de la investigación se centra en una secuencia didáctica desarrollada por medio de la creación y diseño de actividades específicas que la conformarán, destinadas a mejorar la enseñanza del número racional como fracción mediante la integración de la música. Estas actividades están diseñadas especialmente para abordar las dificultades identificadas en las habilidades de representación gráfica y simbólica en estudiantes de quinto grado en el Colegio Summerhill School. Para ello hemos identificado y seguido los siguientes ítems que consideramos básicos en esta propuesta teniendo en cuenta el análisis de los resultados obtenidos.

- Identificación de Contenidos Musicales Relevantes: el diseño de actividades comienza con la identificación de conceptos musicales y elementos que puedan ser vinculados de manera efectiva con las fracciones. Esto implica seleccionar

- ritmos, duraciones, tonalidades u otros elementos musicales que puedan representar visual y auditivamente las fracciones.
- Creación de Actividades Lúdicas y Participativas: se desarrollarán actividades lúdicas y participativas que involucren a los estudiantes activamente en el proceso de aprendizaje. Esto puede incluir juegos musicales, ejercicios de composición, o la creación de representaciones visuales y simbólicas de fracciones utilizando elementos musicales, promoviendo por medio de las mismas, valores de cooperación y trabajo en equipo, los cuales también nos serán útiles para el desarrollo de los estudiantes de manera integral.
 - Integración de Elementos Musicales en la Representación Gráfica: las actividades se enfocarán en integrar elementos musicales en la representación gráfica de fracciones. Por ejemplo, se pueden asignar valores de duración a partes específicas de una figura, permitiendo a los estudiantes asociar conceptos matemáticos con representaciones musicales, entre otros de manera que incentivemos su reflexión crítica y el análisis metacognitivo
 - Uso de Símbolos Musicales para la Representación Simbólica: las actividades estarán diseñadas para enseñar y reforzar la conexión entre símbolos musicales y representación simbólica de fracciones. Los estudiantes podrían asociar un determinado ritmo o nota musical con una fracción específica, facilitando así la comprensión de la simbología matemática. Lo cual también podrán realizar por grupos colaborativos afianzando así el trabajo en equipo.
 - Evaluación Formativa Continua: se implementará una evaluación formativa continua durante la realización de las actividades. Esto permitirá ajustar y adaptar la secuencia didáctica según las necesidades y el progreso de los

estudiantes. La retroalimentación constante contribuirá a optimizar la efectividad de las actividades propuestas, apoyando mediante estas el uso de la expresión oral y escrita de las comprensiones tanto individuales como escritas colectivas

- Incorporación de Recursos Tecnológicos: en la era digital actual, se explorarán recursos tecnológicos como software musical educativo, aplicaciones interactivas, o herramientas multimedia que puedan enriquecer y potenciar las actividades propuestas.
- Adaptabilidad a Estilos de Aprendizaje: las actividades se diseñan teniendo en cuenta la diversidad de estilos de aprendizaje de los estudiantes. Buscando adaptabilidad para que cada estudiante pueda abordar los conceptos matemáticos desde la música de manera más personalizada y efectiva.

Recursos de la secuencia didáctica

- Implementación Piloto y Retroalimentación: antes de la implementación completa, se realizará una fase piloto de las actividades con un grupo reducido de estudiantes. La retroalimentación recopilada de esta fase se utilizará para realizar ajustes finales y garantizar la eficacia de la secuencia didáctica.
- Documentación y Material de Apoyo: se generará documentación detallada y material de apoyo para los docentes que implementarán la secuencia didáctica. Esto incluirá guía paso a paso, ejemplos, y recursos adicionales que faciliten la correcta ejecución de las actividades.
- Evaluación Formativa: al finalizar la implementación de la secuencia didáctica, se llevará a cabo una evaluación, en la cual se pretende analizar el progreso de

los estudiantes en relación con las habilidades de representación gráfica y simbólica de fracciones, realizando adicionalmente una reflexión grupal donde los estudiantes compartirán sus experiencias y percepciones sobre el proceso de aprendizaje de las fracciones a través de la música. comparando los resultados tanto académicos como personales obtenidos antes y después de la intervención musical.

En resumen, el diseño de actividades para la enseñanza del número racional como fracción desde la música busca ser integral, adaptativo y efectivo, abordando las dificultades identificadas y proporcionando a los estudiantes una experiencia educativa enriquecedora que integre de manera innovadora las disciplinas de matemáticas y música, sin dejar de lado el desarrollo del ser como tal.

Además, se tuvieron en cuenta los siguientes principios pedagógicos a la hora de elaborar la secuencia didáctica, ya que son parte de sus fundamentos.

- Integración Curricular.

La metodología debe buscar la integración de la música en el currículo matemático. Según Beane (1997) la integración curricular no sólo se refiere a la combinación de uno o más saberes si no a la integración de estos saberes con la vida del estudiante. Cómo el estudiante va a interactuar con su realidad y qué herramientas va a tener debido a esta integración.

En el caso de las matemáticas y la música esto implica no solo utilizar la música como herramienta motivadora, sino también como un medio para explorar y consolidar conceptos matemáticos, incluidos los números racionales. La música no será solo un

complemento, sino una parte integral del currículo matemático, ello implica explorar cómo la música puede enriquecer la comprensión matemática y proporcionar un contexto significativo para el aprendizaje de fracciones. La integración curricular no solo se debe centrar en la música como un añadido, sino como un componente intrínseco de la experiencia matemática, profundizando estrategias para fusionar la enseñanza de las matemáticas y la música de manera coherente y significativa; con ellos claro se pueden diseñar actividades que vinculen de manera natural los conceptos matemáticos con elementos musicales, promoviendo una comprensión integral y transdisciplinaria de las fracciones.

- Evaluación Formativa.

La evaluación formativa es esencial para comprender el progreso de los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. Debe incluir indicadores específicos relacionados con la mejora en la representación gráfica y simbólica de los números racionales. La evaluación formativa será continua y centrada en el progreso del estudiante. Se utilizarán indicadores específicos relacionados con la mejora en la representación gráfica y simbólica de los números racionales. Esto permitirá ajustes y adaptaciones continuas en el proceso de enseñanza. La evaluación formativa no solo medirá el progreso, sino que también identificará áreas específicas de dificultad en la representación gráfica y simbólica, por ello se deben centrar estrategias para ajustar la enseñanza en tiempo real según las necesidades individuales. (Díaz-Barriga, 2015).

Actividades.

A continuación, se exponen 3 actividades diseñadas con estas características y secuencia didáctica para la apropiación de la enseñanza del número racional como fracción

desde la música, para estudiantes con dificultades en las habilidades de la representación gráfica y simbólica.

Actividad 1: "Ritmo Fraccional"

Competencia: | Analizar cómo las duraciones de las notas musicales se relacionan con conceptos fraccionarios, identificando similitudes y diferencias entre ambas representaciones.

Comentado [C1]: Objetivo o competencia, cuál camino utilizarán??? Arriba es competencia, debe haber una relación entre las actividades que se muestran y los elementos de la secuencia....

Introducción:

- Saludo y motivación.
- Breve explicación sobre la relación entre fracciones y música.
- Presentación del logro a alcanzar. "Reforzar la conexión entre las notas musicales y las fracciones, demostrando comprensión de cómo las fracciones se representan en la música".

Recursos:

- Partituras con patrones rítmicos.
- Instrumentos de percusión.
- Creación de grupos colaborativos.

Descripción:

- Proporciona a los estudiantes una breve introducción sobre la relación entre la duración de las notas musicales y las fracciones. Asocia, por ejemplo, la duración de una semicorchea con $\frac{1}{4}$ y la duración de una negra con $\frac{1}{2}$.

- Presenta una serie de patrones rítmicos sencillos escritos en partituras, donde las duraciones de las notas representan fracciones específicas.
- Pide a los estudiantes que toquen o canten los patrones utilizando instrumentos de percusión o simplemente sus manos para marcar el ritmo.
- Por equipos animar a los estudiantes a discutir cómo las duraciones de las notas en la música pueden compararse con las fracciones, reforzando así la conexión entre ambos conceptos.

Actividad 2: "Composición Fraccional"

Competencia: Interpretar cómo la duración asignada a cada nota en una composición musical refleja la fracción correspondiente, demostrando comprensión mediante ejemplos concretos y explicaciones claras.

Introducción:

- Saludo y motivación.
- Breve explicación sobre que es una composición musical.
- Presentación del logro a alcanzar. "Emplear instrumentos musicales, software de composición musical o incluso la voz y palmas para representar composiciones fraccionales con precisión y creatividad".

Recursos:

- Tarjetas con fracciones.
- Instrumentos musicales o software de composición.

Descripción:

- Explica a los estudiantes que serán compositores musicales y que sus composiciones representarán visualmente fracciones.
- Proporciona tarjetas con diferentes fracciones escritas (por ejemplo, $1/4$, $1/2$, $3/4$) y pide a los estudiantes que elijan una.
- Asocia cada fracción con una duración de nota musical y guía a los estudiantes para que usen esas duraciones al crear sus composiciones.
- Los estudiantes pueden usar instrumentos musicales, software de composición musical o incluso simplemente su voz y palmas para representar sus composiciones fraccionales.
- Al finalizar, cada estudiante explica cómo la duración de las notas en su composición representa la fracción asignada. Adicionalmente se les pedirá realizar una intervención oral y/o escrita de las comprensiones colectivas, destacando la importancia de la expresión simbólica en el proceso de aprendizaje.

Actividad 3: "Simbolismo Musical de Fracciones"

Competencia: Relacionar los símbolos musicales con su equivalencia fraccional, argumentando cómo la notación musical puede ser utilizada como una representación visual de fracciones en una composición.

Introducción:

- Saludo y motivación.
- Breve explicación sobre qué es un símbolo.

- Presentación del objetivo de la clase. “Crear una composición musical original que utilice los símbolos musicales de manera efectiva para representar fracciones específicas, demostrando comprensión profunda de la relación entre la música y las matemáticas fraccionales”.

Recursos:

- Lista de símbolos musicales básicos.
- Ejemplos de fracciones escritas.

Descripción:

- Presenta una lista de símbolos musicales básicos (notas, pausas, etc.) y explícales a los estudiantes cómo cada símbolo puede asociarse con una fracción.
- Proporciona a los estudiantes ejemplos de fracciones escritas y pídeles que seleccionen los símbolos musicales que representarían cada fracción.
- En grupos colaborativos, dar a los estudiantes hojas de papel y pídeles que creen una composición musical que utilice esos símbolos para representar fracciones específicas.
- Invita a los grupos a presentar sus composiciones, discutiendo la relación entre los símbolos musicales y las fracciones.

Al finalizar cada una de estas actividades entre otras se hace necesario realizar un cierre adecuado el cual estará diseñado de la siguiente manera.

Cierre y Discusión:

- Reproducción de algunas composiciones grupales.

- Reflexión por grupos sobre cómo la música contribuye en la comprensión de las fracciones, incentivando la reflexión crítica y el análisis metacognitivo.
- Preguntas abiertas para fomentar la discusión y consolidar aprendizajes.

Tareas para la Casa:

- Reflexión escrita: Los estudiantes pueden escribir sobre lo aprendido y cómo la música les ayudó a comprender mejor las fracciones y amplifico su motivación tanto para el aprendizaje de las matemáticas como de la música.

Evaluación:

- Se evaluará la participación activa de los estudiantes en las actividades.
- Revisión de las composiciones musicales y su capacidad para representar fracciones.
- Observación de la comprensión de la relación entre símbolos musicales y fracciones.

Estas actividades buscan integrar de manera práctica y lúdica los conceptos de fracciones y música, permitiendo a los estudiantes explorar y comprender la relación entre ambas disciplinas de manera creativa.

Capítulo V

Conclusiones

- En síntesis, abordar las dificultades identificadas mediante la integración de la música en la enseñanza del número racional como fracción. A partir de los resultados se puede evidenciar que algunos de los estudiantes seleccionados en la muestra afrontan dificultades significativas en cuanto a las habilidades de la representación gráfica y simbólica del objeto matemático. Dichas dificultades impactan tanto la perspectiva del concepto de fracción como su desarrollo posterior. No obstante, a partir de la investigación se evidencia que integrar la música en los procesos de enseñanza – aprendizaje apoya el avance en cuanto a superar dichos obstáculos. Mediante la asociación de elementos musicales como las figuras, que son las diferentes duraciones de las notas musicales, las cuales se representa mediante símbolos gráficos, junto con el objeto matemático, en este caso los números fraccionarios, se genera en los estudiantes un aprendizaje significativo y permanente, que propende a mejorar su comprensión de las fracciones tanto en su representación gráfica como simbólica. Se fomenta entonces un aprendizaje motivador, por medio de actividades diseñadas en la investigación que contienen el uso de composiciones musicales y la agrupación de figuras musicales y fracciones y se permite, de esta manera, la aplicación de una visión lúdica a la hora de abordar las dificultades demostradas.
- El proceso educativo, enseñanza – aprendizaje, se puede fortalecer mediante la integración de la música y las matemáticas. Se evidencia la carencia en el currículo actual del vínculo que se puede generar entre ambas disciplinas. No obstante,

cuando se examina la correlación entre el conocimiento de la música y los números racionales fraccionarios se hacen presentes las formas en que se puede enriquecer el currículo integrando dichas disciplinas. Al emplear la música como herramienta pedagógica es posible afrontar las dificultades presentadas a la hora de desarrollar procesos con fracciones y así mismo motiva el uso de elementos musicales en el currículo actual. Lo que sugiere la investigación es que el empleo de la música no solo promueve la mejora de procesos matemáticos con las fracciones sino, además, la motivación de los estudiantes en el estudio de estas. En consecuencia, integrar dichas disciplinas no solo apoya los procesos presentados en las dificultades a la hora de representar las fracciones, también fortalece el vínculo entre distintas disciplinas y genera un aprendizaje significativo.

Recomendaciones

Las recomendaciones están encaminadas a la gestión pedagógica de coordinadores y profesores de matemática, respecto a mejorar el currículo de manera integral, con la propuesta a la enseñanza de los números fraccionarios y su representación gráfica y simbólica mediante la música; la capacitación pedagógica de esta estrategia didáctica; la continuidad del proceso investigativo de los cambios en los aprendizajes y la motivación e interés de los estudiantes en este contenido. Lo cual se precisa en:

- Integración Curricular. Optar por la integración de la música en el currículo de matemáticas, específicamente para la enseñanza de números racionales fraccionarios en el quinto grado. Esto puede ser adoptado como una práctica pedagógica regular.

- Formación Docente. Proporcionar oportunidades de formación y desarrollo profesional para los docentes, enfocadas en la incorporación efectiva de la música en el aula de matemáticas. Esto puede incluir talleres, cursos o recursos educativos que les permitan adquirir habilidades y conocimientos relacionados con esta metodología.
- Creación de Recursos Educativos. Desarrollar recursos educativos que sirvan como guías y material de apoyo para los docentes que deseen implementar esta estrategia. Estos recursos pueden incluir ejemplos de actividades, ejercicios, y sugerencias prácticas para facilitar la enseñanza de números racionales fraccionarios mediante la música.
- Monitoreo y Evaluación Continua. Establecer mecanismos de monitoreo y evaluación continua para medir el impacto de la metodología propuesta. Esto permitirá ajustes y mejoras basadas en la retroalimentación constante, asegurando la efectividad a lo largo del tiempo.
- Involucramiento de Padres. Fomentar la participación de los padres en el proceso educativo, brindándoles información sobre la metodología implementada y cómo pueden apoyar el aprendizaje en casa. Esto fortalecerá la coherencia entre el aprendizaje en el aula y fuera de ella.
- Investigación Continua. Promover la investigación continua en el área de la educación matemática y la integración de la música, explorando diferentes enfoques y estrategias para adaptarse a las necesidades cambiantes de los estudiantes.
- Difusión de Resultados. Compartir los resultados y las experiencias obtenidas de esta investigación con la comunidad educativa más amplia. Esto puede

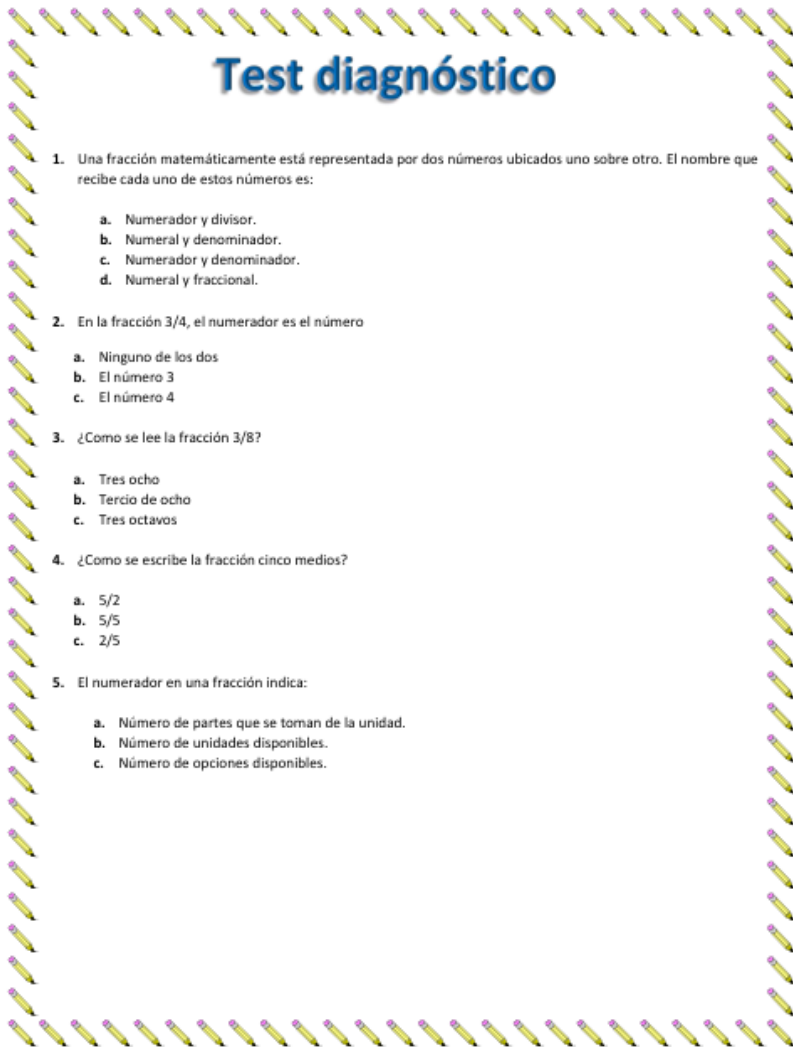
realizarse a través de presentaciones en conferencias, publicaciones en revistas educativas, o incluso mediante la creación de una red de docentes interesados en la temática.

- Adaptación a Otros Niveles Educativos. Considerar la posibilidad de adaptar esta metodología para otros niveles educativos y áreas temáticas. La música puede ser una herramienta versátil en la enseñanza de diversas disciplinas.

Estas recomendaciones buscan maximizar el impacto positivo de la investigación, facilitando la implementación exitosa de la metodología propuesta en diferentes contextos educativos.

Anexos





Anexo 1: Test diagnóstico



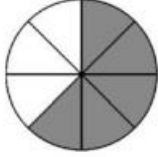
Test diagnóstico

1. Una fracción matemáticamente está representada por dos números ubicados uno sobre otro. El nombre que recibe cada uno de estos números es:
 - a. Numerador y divisor.
 - b. Numeral y denominador.
 - c. Numerador y denominador.
 - d. Numeral y fraccional.
2. En la fracción $\frac{3}{4}$, el numerador es el número
 - a. Ninguno de los dos
 - b. El número 3
 - c. El número 4
3. ¿Como se lee la fracción $\frac{3}{8}$?
 - a. Tres ocho
 - b. Tercio de ocho
 - c. Tres octavos
4. ¿Como se escribe la fracción cinco medios?
 - a. $\frac{5}{2}$
 - b. $\frac{5}{5}$
 - c. $\frac{2}{5}$
5. El numerador en una fracción indica:
 - a. Número de partes que se toman de la unidad.
 - b. Número de unidades disponibles.
 - c. Número de opciones disponibles.

6. A continuación, relaciona cada fracción con su representación gráfica

	$\frac{7}{10}$
	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{5}$
	$\frac{5}{8}$

7. ¿Qué fracción se está representando?



a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{3}$ c. $\frac{5}{8}$ d. $\frac{8}{5}$

Anexo 2: Test de representación

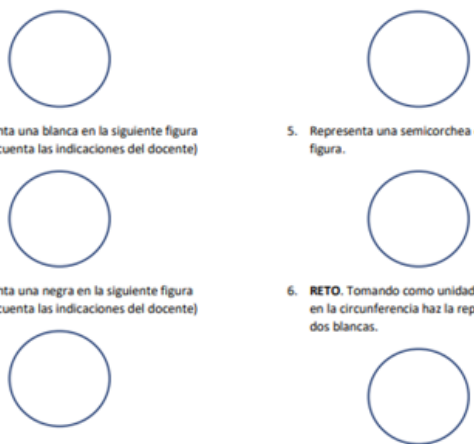
Test de representación

GUÍA ESTUDIANTE

	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
Notas	$\circ = 1$	$\circ = \frac{1}{2}$	$\bullet = \frac{1}{4}$	$\blacktriangledown = \frac{1}{8}$	$\blacktriangledown = \frac{1}{16}$	$\blacktriangledown = \frac{1}{32}$	$\blacktriangledown = \frac{1}{64}$
Silencios	$\text{—} = 1$	$\text{—} = \frac{1}{2}$	$\text{z} = \frac{1}{4}$	$\text{v} = \frac{1}{8}$	$\text{z} = \frac{1}{16}$	$\text{v} = \frac{1}{32}$	$\text{v} = \frac{1}{64}$

Cuadro 1

1. Representa a la redonda en la siguiente figura
(Ten en cuenta las indicaciones del docente)
2. Representa una blanca en la siguiente figura
(Ten en cuenta las indicaciones del docente)
3. Representa una negra en la siguiente figura
(Ten en cuenta las indicaciones del docente)
4. Representa una corchea en la siguiente figura
(Ten en cuenta las indicaciones del docente)
5. Representa una semicorchea en la siguiente figura.
6. **RETO.** Tomando como unidad a la redonda, en la circunferencia haz la representación de dos blancas.



Referencias

- AERA. (2023). *aera.net*. American Educational Research Association : <https://www.aera.net/>
- Álvarez, T., Bertran, C., Caballero, A., Cebrián, A., Gómez, L., & Álvarez, T. (2016). La música vista a través de futuros docentes: ¿la formación musical sirve a los maestros generalistas de Primaria? *Educación Y Pedagogía*, 52-75.
- An, S. A., Ma, T., & Capraro, M. (2011). Preservice Teachers' Beliefs and Attitude About Teaching and Learning Mathematics Through Music: An Intervention Study. *School Science & Mathematics.*, Vol. 111 Issue 5, p236-248. 13p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=63219463&lang=es&site=ehost-live>.
- Arias, P., & Hernández, E. (2009). Una propuesta de enseñanza de la fracción y de los números racionales positivos implementando las figuras musicales. Experiencia de caso en una escuela indígena nasa. *Encuentro colombiano de matemática educativa*.
- Barberà, E. (2015). Los fundamentos teóricos de la tutoría presencial y en línea: una perspectiva socio-constructivista. *Educación en Red y Tutoría en Línea*, 151-168. https://doi.org/https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/59789675/fundamentos_tutoria_barbera20190618-19070-x0wz3u-libre.pdf?1560912620=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DLOS_fundamentos_teoricos_de_la_tutoria_p.pdf&Expires=1706326061&Signature=gCNXbAy0FMNj6
- Beane, J. A. (1997). *Curriculum Integration : Designing the Core of Democratic Education*. New York: Teachers College Press.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 296–333.
- Beyranevand, M. L. (Feb de 2014). The Different Representations of Rational Numbers. . *Mathematics Teaching in the Middle School*, p382-385. 4p. . <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=94347600&lang=es&site=ehost-live>
- Brookhart, S., & Nitko, A. (2016). *Educational Assessment of Students*. Pearson.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires: Editorial Zorzal.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie de Situations Didactiques* .
- Brousseau, G. P. (1986). La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques Thèse d'état. *Université Sciences et Technologies – Bordeaux I*.
- Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (7 de Marzo de 2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. Universidad de Costa Rica.

- Coronado, E. (2016). Dificultades que se encuentran en el cálculo de las operaciones con números racionales en estudiantes de primero básico en los institutos nacionales de educación básica de Malacatán, San Marcos. Malacatán, Guatemala.
- Creswell, J. (2013). *Qualitative inquiry and research design*. Línea de investigación en juventud Doctorado en ciencias sociales niñez y juventud.
- Czikszentmihalyi, M. (1990). *Flow: The Psychology of Optimal Experience*. New York: Harper & Row.
- DeWolf, M., Chiang, J. N., Bassok, M., Holyoak, K. J., & Monti, M. M. (2016). Neural representations of magnitude for natural and rational numbers. *NeuroImage*, 141, 304–312. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=118103469&lang=es&site=ehost-live>.
- Días Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas, G. (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una Interpretación constructivista*. México: McGrawHill.
- Díaz-Barriga, Á. (2015). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. UNAM.
- Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo: Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática*. Universidad del Valle: Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2004). *Actualización de: Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo: Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, 1999*. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.
- Escolano, R., & Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 17-35.
- ETS. (2023). *ets.org*. Educational Testing Service : <https://www.ets.org/>
- Eulogio Chanca, P. J., & Ramos Huamán, A. W. (2019). Representación semiótica en el aprendizaje de los números racionales en alumnos del primer grado de educación secundaria de la I.E. José Carlos Mariátegui de Huancayo. Huancayo, Perú.
- Fandiño, M. (2008). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Flores, F. (2008). *Historia y didáctica de los números racionales e irracionales*. Jaén: Íttakus.
- Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma*, 17(1), 10-16.
- Gairín, J. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos : Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos*, 4, 137-159.

- Galbete-Ahechu, E. (15 de 05 de 2015). *reunir.unir.net*. Propuesta Didáctica para el aprendizaje del Bloque de Números en 1º de ESO, utilizando la Música como Recurso Didáctico.: <https://reunir.unir.net/handle/123456789/3314>
- GCF Global. (3 de Julio de 2023). *edu.gcfglobal.org*. Música y fracciones: <https://edu.gcfglobal.org/es/fraccionarios/evaluacion-de-fraccionarios/1/>
- González González, R., López Tamayo, P. Á., & Bello Rodríguez, G. (2019). *Opuntia Brava*, 11(4), p83-93. 11p. <https://doi.org/http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=fap&AN=139663365&lang=es&site=ehost-live>
- González, I., Benvenuto, G., & Lanciano, N. (2017). Dificultades de Aprendizaje en Matemática en los niveles iniciales. Investigación y formación en la escuela italiana. *Psychology, Society & Education*, 135-145.
- González, R., Bello Rodríguez, C. G., & Santiesteban Almaguer, C. E. (2019). *Roca: Revista Científico-Educacional de la Provincia de Granma*, 15(2), 140-153 <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=fap&AN=137719415&lang=es&site=ehost-live>. <https://doi.org/http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=fap&AN=137719415&lang=es&site=ehost-live>
- Hoffer, C. (2005). *Music for Elementary Classroom Teachers*. Michigan: Waveland Press.
- Holmes, S., & Hallam, S. (2017). The impact of participation in music on learning mathematics. *London Review of Education*, Vol. 15 Issue 3, p425-438. 14p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=126605189&lang=es&site=ehost-live>.
- Juidías, J., & Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, 342, 257-286.
- Leiva, A., & Palliotto, M. (2011). *Un enfoque constructivista en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para el desarrollo de competencias*. REDHECS.
- MATEI, M.-L. (2019). Musical education or education through music? Transdisciplinary approach to the musical education of the adolescents. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series VIII: Performing Arts*, Vol. 12, p177-186. 10p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=142714362&lang=es&site=ehost-live>.
- Mato, D., Chao, R., & Chao, A. (2019). Efectos de enseñar matemáticas a través de actividades musicales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 22 Issue 2, p163-184. 22p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=fap&AN=138068479&lang=es&site=ehost-live>.

- Merriam, S. (1988). *Case Study research in education. A qualitative approach*. San Francisco: Jossey Bass.
- Montiel, M. (2017). Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música. *Foro de Educación*, Vol. 15 Issue 22, p1-30. 30p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=123321703&lang=es&site=ehost-live>.
- Morales, O. A. (2003). Fundamentos de la investigación documental y la monografía. *Manual para la elaboración y presentación de la monografía*, 1-14. Mérida, Venezuela: Universidad de Los Andes.
- Moseley, B., & Okamoto, Y. (2008). Identifying Fourth Graders' Understanding of Rational Number Representations: A Mixed Methods Approach. *School Science & Mathematics*, Vol. 108 Issue 6, p238-250. 13p. 1 Chart, 2 Graphs. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=35061048&lang=es&site=ehost-live>.
- Niemi, D. (1996). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explanations. *Journal of Educational Research*, Vol. 89 Issue 6, p351-363. 13p. 10 Charts. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=9610314242&lang=es&site=ehost-live>.
- NUNES, K. R. (2020). Possibilidades da música como recurso didático-pedagógico nos diversos níveis e modalidades de ensino. *Revista Científica Intellectus*, p247-256. 10p obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=146639536&lang=es&site=ehost-live>.
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *EMA*, 8(2), pp. 157-182.
- Patton, M. Q. (1980). *Qualitative Evaluation Methods*. Qualitative evaluation methods: ca: Sage.
- Pérez, C. (Junio de 2013). Educación, música y matemáticas: un triángulo afinado en armonía. Valladolid, España.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. 69-108.
- Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. *Desarrollo psicológico y educación*, III. *Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar*, Capítulo 9, 155-182.
- Rodríguez Palmero, M. (2008). *la teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva*. Octaedro, S.L. <https://doi.org/https://cmapublic3.ihmc.us/rid=1H30ZSRPG-1HGWM5F-QZQ/Teor%C3%ADa%20del%20Aprendizaje%20Significativo%20a%20partir%20de%20la%20Perspectiva%20de%20la%20Psicolog%C3%ADa%20Cognitiva.pdf>

- Rodríguez, I., Nascimento, J., Voigt, M., & Santos, F. (2019). Numeracy Musical Training for school children with low achievement in mathematics. *Anales de Psicología*, Vol. 35 Issue 3, p405-416. 12p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=137998671&lang=es&site=ehost-live>.
- Rojas, S. C. (2017). Propuesta metodológica para la enseñanza de los números racionales positivos desde diferentes registros de representación. Bogotá, Colombia.
- Ruíz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana De Educación*, 47(3), 1-8.
- Ryan, R. M., & Deci, E. (2009). Promoting Self-Determined School Engagement: Motivation, Learning, and Well-Being. En K. Wentzel, & D. Miele, *Handbook of Motivation at School* (pág. 29). New York: Routledge.
- Sánchez, F. (2012). Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica. Bogotá, Colombia.
- Santamaría, G. D. (2020). The integration of music and mathematics education in Catalonia and England: perspectives on theory and practice. *Mathematical Intelligencer*, Vol. 42 Issue 2, p85-88. 4p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=143660770&lang=es&site=ehost-live>.
- Santrock, J. (2013). *Psicología de la educación (5 ed.)*. México Df, México: Mc Graw Hill Education.
- Sautoy, M. D. (2004). Universal language of maths and music. *TES: Times Educational Supplement*, p24-24. 2/3p Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=12707106&lang=es&site=ehost-live>.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Principios básicos de investigación cualitativa. Procedimientos y técnicas de la teoría fundamentada*. Newbury Park: CA: Sage.
- Vasilachis de Gialdino, I. (1992). *Métodos cualitativos I". Los problemas teórico-epistemológicos*. Buenos Aires: Editor de América Latina.
- Vega García, P., & Guerra Tibocho, D. (2020). *Pedagogía conceptual Un modelo pedagógico para formar seres humanos afectivamente competentes y creativamente talentosos*. Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto Merani.
- Velazco Reyes, B., Calsina Ponce, W. C., Valdivia Terrazas, R. F., & Ruelas Vargas, D. (2020). Methods of musical education for the development of the musical memory of music students. *COMUNICACION - Revista de Investigación en Comunicación y Desarrollo*, Vol. 11 Issue 1, p28-39. 12p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=144311863&lang=es&site=ehost-live>.

- Viladot, L., Hilton, C., Casals, A., Saunders, J., Carrillo, C., Henley, J., . . . Welch, G. (2018). The integration of music and mathematics education in Catalonia and England: perspectives on theory and practice. *Music Education Research*, Vol. 20 Issue 1, p71-82. 12p. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=127579552&lang=es&site=ehost-live>.
- Vilar, J. M. (2010). Para qué sirven los modos? Aplicación pedagógica y propuestas prácticas para la Didáctica de la Música. *Revista Electrónica de LEEME*, p76-122. 47p. 93 Diagrams, 2 Charts. Obtenido de <http://bd.usergioarboleda.edu.co:2231/login.aspx?direct=true&db=asn&AN=55467343&lang=es&site=ehost-live>.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes*. Massachusetts: Harvard University Press.
- White, R. (1959). Motivation reconsidered: The concept of competence. *Psychological Review*, 66(5), 297-333.
- Zubiría Samper, M. (2007). Introducción a pedagogía conceptual. *Congreso Latinoamericano de estudiantes de Psicología*. Bogotá: Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto Merani. <http://psicoanaliscv.com/wp-content/uploads/2012/03/MigueldeZubiria-afetividad-y-pedagog%C3%ADa1.pdf>