De las sumas de potencias a las sucesiones de Appell y su caracterización a través de funcionales

MIGUEL ÁNGEL HURTADO BENAVIDES

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2020.

De las sumas de potencias a las sucesiones de Appell y su caracterización a través de funcionales

MIGUEL ÁNGEL HURTADO BENAVIDES

Memoria presentada como requisito parcial para la obtención del título de:
Maestría en Matemáticas Aplicadas

Director
SERGIO ALEJANDRO CARRILLO TORRES

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, 2020

Agradecimientos

De forma muy especial, quiero agradecer al profesor y director Sergio Alejandro Carrillo Torres, por el interés que tuvo desde el primer día que le presenté la idea para elaborar este trabajo, la confianza para aportar sus conocimientos, ideas y experiencia para el desarrollo y construcción del mismo.

Al profesor Leonardo Fabio Chacón Cortés por servir como jurado para este trabajo. Por su ciudadosa revisión, sugerencias y correcciones que ayudaron a mejorarlo.

Agradezco a la Universidad Sergio Arboleda, por su atención y acogida. A cada uno de los profesores que transmiten su conocimiento formando un camino hacia el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Por último, agradezco a mis compañeros, quienes compartieron conmigo en un entorno de aprendizaje, con lo cual creció mi gusto y admiración por la belleza de las Matemáticas.

Índice general

Introducción

El estudio de las sumas de potencias de enteros positivos ha sido un tema de interés desde la antigüedad [8] que se mantiene vigente hasta nuestros días, ver por ejemplo [29, 24]. Actualmente estás fórmulas son de conocimiento común, sobre todo para potencias bajas, y las encontramos como ejemplos sencillos de inducción matemática y de introducción a la integral de Riemann. Históricamente, existen evidencias de su desarrollo desde la escuela pitagórica, pero fue hasta el siglo XVII que Jacob Bernoulli [9, 10], motivado por investigaciones en probabilidad, quien alcanzó el triunfo de descifrar una fórmula general de tipo polinomial para cualquier potencia. Su método llevó además al descubrimiento de la sucesión de números que hoy llevan su nombre, a saber, los números de Bernoulli. Estos aparecen naturalmente en múltiples fórmulas del análisis matemático, por ejemplo como coeficientes en la expansión de Taylor de funciones trigonométricas y en el cálculo de sumas de series [32]. En efecto, ellos permiten el cálculo efectivo de $\zeta(2k)$, donde k es un entero no nulo y ζ denota la famosa función zeta de Riemann.

En términos modernos, las fórmulas encontradas por Bernoulli se expresan de manera sintética a través de los hoy llamados polinomios de Bernoulli. Al igual que los coeficientes que los definen, estos polinomios juegan un papel predominante en análisis. Entre sus aplicaciones más comunes podemos mencionar la fórmula de sumación de Euler-MacLaurin [32, 47], de gran valía en métodos de integración numérica y en desarrollos asintóticos discretos. Además, estos polinomios también aparecen en problemas de probabilidad [42, 43], combinatoria [15] y teoría de números [5]. Por otra parte, aunque menos conocidas, las sumas alternadas de potencias de enteros positivos admiten un desarrollo análogo al caso de las potencias usuales. Ellas conllevan a los polinomios de Euler quienes satisfacen propiedades similares a sus contrapartes no alternadas, y que son la base de la fórmula de sumación de Euler–Boole [12].

El análisis de sucesiones polinomiales es un problema clásico que aparece en distintas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en el desarrollo de soluciones de ecuaciones diferenciales a través de polinomios ortogonales [32], expansiones polinomiales de funciones analíticas [11], problemas de interpolación en análisis numérico [41], o sucesiones de naturaleza combinatoria que se codifican a través de series generadoras. Para el caso de los polinomios de Bernoulli y de Euler, su estudio se puede enmarcar dentro de una clase específica de polinomios. En efecto, además de sus coincidencias de origen, y entre sus propiedades generales, comparten una característica fundamental: son *sucesiones de Appell*. Esto significa que cada una de ellas conforma una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\geq 0}$ que satisface la condición

$$p_n'(x) = np_{n-1}(x),$$

donde $p_0(x)$ es una constante distinta de cero. Esta recurrencia diferencial acuñó su nombre en honor a Paul Émile Appell, matemático de nacionalidad francesa, que introdujo dichas familias de polinomios en 1880 [6]. En primera instancia, estas generalizan ampliamente a los monomios y surgen de manera natural al establecer la fórmula de Taylor con resto integral [13, Chapitre VI], [14, Appendix A]. Además de los polinomios de Bernoulli y Euler, esta clase contiene a los polinomios de Hermite, que resultan ser los únicos polinomios ortogonales y de Appell [40].

Aunque no son nuestro objeto de estudio en este trabajo, es importante mencionar que los polinomios de Appell admiten una generalización y resultan ser una subclase de los *polinomios de Sheffer* –polinomios de *tipo cero* como originalmente eran denominados [39]–. Estas familias fueron consideradas por I. M. Sheffer en sus trabajos sobre soluciones de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Su estudio desde un punto de vista algebraico, liderado por Gian-Carlo Rota y Steven Roman, desembocó en la teoría que hoy se conoce como *Cálculo Umbral* [34, 35, 36]. Su piedra angular es la doble identificación de las series de potencias formales en una variable con los operadores lineales invariantes por traslación del conjunto de polinomios en una variable, y a su vez con los funcionales lineales de este anillo. Uno de los logros de esta teoría fue dar un fundamento matemático sólido a técnicas de computo simbólico usadas en el cálculo de diferencias finitas o en el cálculo de Heaviside creado por Boole.

Los polinomios de Appell y de Sheffer son una área activa de investigación con diversas aplicaciones en probabilidad y teoría de funciones. Entre sus líneas de trabajo se encuentran el desarrollo de nuevas fórmulas cerradas [3, 4], la obtención de propiedades especiales de sucesiones particulares [19], y descripciones alternativas de la teoría. Por ejemplo, su estudio a través de representaciones en forma de determinantes [1, 2, 17, 18, 46, 48] ó, con un enfoque probabilístico, por medio de variables aleatorias [1, 43]. Como aplicaciones interesantes podemos nombrar los teoremas del límite no central para distribuciones de probabilidad [7], que para el caso Gaussiano se reducen al caso de los polinomios de Hermite. También, el papel que juega una amplia clase de polinomios de Appell como valores especiales de funciones trascendentes, resultado recientemente demostrado en [30], que extiende del caso de los polinomios de Bernoulli como los valores en los enteros negativos de la función zeta de Hurwitz.

El objetivo de esta memoria es contribuir al estudio de las sucesiones de Appell desde un punto de vista elemental. El trabajo se divide en dos capítulos. En el primero, que comienza con apuntes históricos sobre el problema de las sumas de potencias, tiene como propósito demostrar una nueva recurrencia integral para estas sumas (Proposición 1.2). Destacamos que la génesis de este trabajo son las observaciones heurísticas de dichas recurrencias obtenidas en [25] por el autor. Cabe notar que esta aproximación es muy similar a la descrita en [44, p. 18]. Aquí damos una prueba sencilla de ambas recurrencias empleando la técnica de series generadoras, muy familiar en combinatoria. Desde este punto de partida llegamos de manera natural a los polinomios de Bernoulli para los cuales también establecemos una nueva recurrencia integral (Proposición 1.5) y diversas propiedades ya bien conocidas en la literatura. El capítulo finaliza con el caso de las sumas de potencias alternadas y los polinomios de Euler, para los cuales presentamos resultados similares (Proposición 1.7).

En el segundo capítulo, pasamos a tratar los polinomios de Appell generalizando los contenidos del primer capítulo. Nuestro enfoque se basa en la caracterización de estas sucesiones a través de funcionales del conjunto de polinomios reales. El resultado principal se encuentra descrito en el Teorema 2.1 donde se establece una nueva recurrencia integral, a su vez que se demuestra que esta fórmula es equivalente a diferentes caracterizaciones conocidas. El capítulo contiene dos secciones con ejemplos clásicos, incluido el funcional correspondiente a cada caso. Por ejemplo, los polinomios de Bernoulli y Euler de orden superior [31], de Apostol-Euler, de Hermite y de Bernoulli-Kummer [19], entre otros. Vale la pena destacar que como consecuencia inmediata del resultado principal recuperamos caracterizaciones conocidas de estos polinomios dispersas en la literatura. Para finalizar, a manera complementaria, incluimos demostraciones de la fórmula de Taylor general y las fórmulas de Euler-MacLaurin y Euler-Boole como ilustraciones particulares del uso de los polinomios de Appell. Se incluyen dos apéndices, el primero sobre experimentación numérica de valores de integrales definidas a través de la fórmula de Euler-MacLaurin, y el segundo contiene los códigos en Python que se emplearon para la comprobación computacional de algunas de las fórmulas presentadas en este trabajo.

Capítulo 1

Sumas de potencias y sus recurrencias a través de integrales

La búsqueda de una fórmula cerrada para las sumas

$$S_m(n) := 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

de las n primeras potencias m-ésimas es quizás uno de los problemas más bellos de toda la aritmética. Estas sumas cautivaron la atención de grandes matemáticos como Arquímedes de Siracusa, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Jacob Bernoulli, Gilles de Roberbal, entre otros [27]. De la misma forma, podemos considerar el mismo problema para las sumas alternadas

$$A_m(n) =: 1^m - 2^m + 3^m - \cdots + (-1)^{n+1}n^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

El objetivo de este capítulo es demostrar recurrencias, aparentemente nuevas, a través de integrales definidas para las sumas $S_m(n)$ y $A_m(n)$. Este estudio lleva naturalmente a los polinomios de Bernoulli y de Euler que serán tratados con cierto detalle. En particular, veremos que estos también satisfacen recurrencias integrales del mismo tipo. Para comenzar hacemos una introducción histórica sobre el problema de determinar $S_m(n)$ como un polinomio en n.

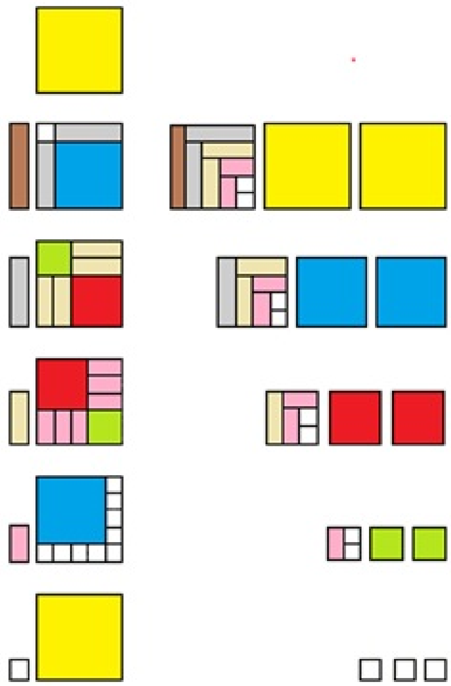
1.1. Algunos apuntes históricos

La historia sobre el problema de encontrar una fórmula cerrada para $S_m(n)$ se puede consultar en [27], de donde basamos principalmente nuestra exposición. Esta referencia hace énfasis en el trabajo de Euler quien culmina este estudio con su famosa *fórmula de sumación* que será discutida en el capítulo 2.

Una de las primeras contribuciones históricas sobre este problema, para el caso $m = 2$ sobre la suma de cuadrados se debe a Arquímedes (Siracusa, Sicilia, 287 a.C. - 212 a.C.). En su libro "Sobre las espirales", Proposición 10, afirma que (escrito en notación moderna)

$$(n+1)n^2 + \sum_{i=1}^{n} i = 3\sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{1.1}$$

Una justificación geométrica que explica la argumentación dada por Arquímedes se debe a Kathe Kanim [26], y para el caso $n = 5$ se ilustra por:



En efecto, tomemos como unidad el lado del cuadrado más pequeño. Las dos columnas de la izquierda, corresponden a la suma de los primeros cinco naturales más seis veces el cuadrado de lado cinco. Reorganizando las fracciones de estas áreas se obtiene las figuras de la derecha, cuya área corresponde a tres veces $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.

La ecuación (1.1) permite recuperar $S_2(n)$ a partir de $S_1(n)$. Para valores mayores de m, fue Fermat quien propuso una recurrencia que permite encontrar $S_m(n)$ en términos de las sumas $S_{m-1}(n), \ldots, S_1(n), S_0(n)$. En septiembre de 1636, Fermat escribió en una carta al Padre Marin Mersenne (1588-1648)[21] donde afirmaba, sin demostración, que:

"*El n-ésimo número piramidal es la suma de los primeros números n triangulares. En general, el n-ésimo número figurado de tipo k es la suma de los primeros números n triangulares del tipo $k-1$.*"

En términos modernos esta frase indica que

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+m-1}{m} = \binom{m+n}{m+1},$$

cuya demostración se sigue fácilmente por inducción sobre n empleando propiedades elementales de los coeficientes binomiales. Así por ejemplo, si $m = 0$ esta ecuación se reduce a $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$. Si $m = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$. En general, el método de Fermat para hallar $S_m(n)$ de manera recursiva consiste en desarrollar el producto

$$\frac{(i+m-1)!}{(i-1)!m!} = \frac{i(i+1)(i+2)\cdots(i+m-1)}{m!} = \frac{i^m + a_1 i^{m-1} + a_2 i^{m-2} + \cdots + a_{m-1} i}{m!},$$

donde $a_1, \ldots, a_{m-1}$, son ciertas constantes que dependen de m. Luego, reemplazando en la ecuación anterior, vemos que

$$\frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} i^m + a_1\sum_{i=1}^{n} i^{m-1} + a_2\sum_{i=1}^{n} i^{m-2} + \cdots + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{(n+m)!}{(n-1)!(m+1)!}.$$

Despejando el valor requerido obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{(n+m)!}{(n-1)!(m+1)} - a_1\sum_{i=1}^{n} i^{m-1} - a_2\sum_{i=1}^{n} i^{m-2} - \cdots - a_{m-1}\sum_{i=1}^{n} i,$$

como se había afirmado. Veamos un ejemplo. Para $m = 3$ tenemos que $\frac{(i+2)!}{(i-1)!3!} = \frac{i(i+1)(i+2)}{6} = \frac{i^3+3i^2+2i}{6}$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i.$$

Remplazando las fórmulas para $S_1(n)$ y $S_2(n)$, y tras algunos cálculos se llega a

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

En este caso evidenciamos nuevamente que esta suma es un polinomio en n.

Por otra parte, unos 18 años después del trabajo de Fermat, utilizando sumas telescópicas y el teorema del binomio, Pascal encontró la identidad

$$(n+1)^{m+1} - 1 = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} S_j(n),$$

que hoy lleva su nombre, y que a su vez implica, por ejemplo, por inducción sobre n, que

$$S_m(n) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{(-1)^{m-k+1}}{m-k+1} S_k(n).$$

Esta fórmula comprueba una vez más que $S_m(n)$ es un polinomio de grado $m+1$ en n con término inicial $n^{m+1}/(m+1)$. Es interesante notar que esta última fórmula se puede demostrar con argumentos de variables aleatorias con distribución uniforme, como se hizo muy recientemente en [24].

La fórmula general "explícita", sin embargo, tuvo que esperar a los estudios de Jacob Bernoulli (Basilea, Suiza, 1654-1705). En su libro *Ars Conjectandi* [9, 10] (el arte de conjeturar) publicado en 1713, formuló los principios básicos sobre probabilidad y entre otras cosas, llegó a una fórmula para $S_m(n)$. Bernoulli escribió estas fórmulas hasta la potencia 10, buscando una regularidad. Observó que $S_m(n)$ resultaba ser un polinomio sobre la indeterminada n de grado $m+1$, que tiene la forma:

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + B_2\frac{m}{2}n^{m-1} + B_4\frac{m!}{(m-3)!4!}n^{m-3} + B_6\frac{m!}{(m-5)!6!}n^{m-5} + \cdots + B_m n \\ &= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \sum_{j=2}^{m} \binom{m}{j} \frac{B_j}{m-j+1} n^{m-j+1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde los valores de la sucesión $(B_i)_{i\geq 0}$ son los llamados *números de Bernoulli*, con $B_{2k+1} = 0$ para $k \geq 1$. Estas cantidades satisfacen la fórmula

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} B_i = 0, \quad m \geq 2, \tag{1.3}$$

que demostraremos más adelante. Por ejemplo,

$$1+2B_1=0,\quad B_1=-\frac{1}{2},\qquad 1+3\left(-\frac{1}{2}\right)+3B_2=0,\quad B_2=\frac{1}{6},$$
$$1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+6\cdot\frac{1}{6}+4B_3=0,\quad B_3=0,\qquad 1+5\left(-\frac{1}{2}\right)+10\cdot\frac{1}{6}+10\cdot 0+5B_4=0,\quad B_4=-\frac{1}{30}.$$

De esta manera,

$$S_4(n)=\frac{n^5}{5}+\frac{1}{2}n^4+\left(\frac{1}{6}\right)\frac{4}{2}n^3+\left(-\frac{1}{30}\right)\frac{4!}{1!4!}n=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

Finalmente, destacamos que la fórmula obtenida por Bernoulli fue conocida por Johann Faulhaber, quien las publicó hasta la potencia 17 en 1631, mucho antes que Bernoulli [20]. De hecho, descubrió que para valores impares de m, $S_m(n)$ es un polinomio en $n(n+1)$, mientras que para m par, $S_m(n)$ es $2n+1$ factor de un polinomio en $n(n+1)$. Luego, él empleó este resultado para encontrar las fórmulas explícitas de estas sumas. Para una demostración de este hecho consultar [28].

1.2. La recurrencia integral

Otra motivación para encontrar fórmulas para $S_m(n)$ tras la invención del Cálculo fue la búsqueda del área bajo curvas del tipo $y=x^m$. Por ejemplo, de Roberval (1602–1675) trató este problema usando las desigualdades

$$\frac{n^{m+1}}{m+1}<\sum_{i=1}^{n} i^m<\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1}.$$

En efecto, a partir de estas vemos que

$$\int_0^a x^m dx=a^{m+1}\int_0^1 t^m dt=a^{m+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^m=\frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

De forma recíproca es válido plantear la siguiente pregunta: ¿es posible utilizar la integral definida para obtener fórmulas para $S_m(n)$? ¡La respuesta es si! A continuación explicamos cómo es posible calcular $S_m(n)$ a partir de $S_{m-1}(n)$ utilizando integrales definidas.[1] La justificación será heurística, dejando las demostraciones para las secciones procedentes.

Hasta el momento hemos visto que las fórmulas

$$S_0(n)=1+2^0+\cdots+n^0=n,\qquad S_1(n)=1+2+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$
$$S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6},\qquad S_3(n)=1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4},$$

son válidas para todo $n\geq 1$. A primera vista no es claro como obtener una fórmula a partir de la anterior. La propuesta es “integrar” cada una de ellas. Los términos de la mano derecha no tienen problema al ser polinomios en n y podemos integrar sobre $[0,n]$. Respecto al lado izquierdo, siguiendo las fórmulas clásicas, podemos cambiar cada i^m por $i^{m+1}/(m+1)$. Esto aún deja la incógnita

[1] Este método se encuentra en [25] y es reconocido como novedad por la Universidad Pedagógica Nacional. Véase http://normatividad.pedagogica.edu.co/Acuerdo No 053 de 2014 distincion.pdf

de como obtener la constante que multiplica a n al lado derecho de la ecuación. Simbólicamente tenemos

$$
\begin{aligned}
1^0+2^0+\cdots+n^0=n &\longrightarrow \frac{S_1(n)}{1}=\frac{1^1}{1}+\frac{2^1}{1}+\cdots+\frac{n^1}{1}=\frac{n^2}{2}+A_1\cdot n,\\
1^1+2^1+\cdots+n^1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} &\longrightarrow \frac{S_2(n)}{2}=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{n^3}{2\cdot 3}+\frac{n^2}{2\cdot 2}+\frac{A_2}{2}\cdot n,\\
1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} &\longrightarrow \frac{S_3(n)}{3}=\frac{1^3}{3}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{n^3}{3}=\frac{n^4}{3\cdot 4}+\frac{n^3}{2\cdot 3}+\frac{n^2}{2\cdot 6}+\frac{A_3}{3}\cdot n,
\end{aligned}
$$

donde necesitamos determinar A_1, A_2 y A_3. Simplificando vemos que

$$S_1(n)=\frac{n^2}{2}+A_1 n,\quad S_2(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+A_2 n,\quad S_3(n)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}+A_3 n.$$

La observación clave es que

$$A_1=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad A_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0,$$

es decir, A_m se obtiene como la suma alternada de los coeficientes que acompañan a las demás potencias de n en $S_m(n)$. Pero estos a su vez puede ser descritos mediante una integral:

$$A_1=-\int_{-1}^{0} x dx,\quad \frac{A_2}{2}=-\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}dx,\quad \frac{A_3}{3}=-\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}dx.$$

Estas fórmulas nos indican que las sumas $S_m(n)$ satisfacen la recurrencia

$$\frac{S_m(n)}{m}=\int_0^n S_{m-1}(t)dt-n\int_{-1}^{0} S_{m-1}(t)dt. \tag{1.4}$$

Por ejemplo, para los dos siguientes valores se obtienen las fórmulas

$$
\begin{aligned}
S_4(n)&=4\int_0^n \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}dx-4n\int_{-1}^{0}\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}dx=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30},\\
S_5(n)&=5\int_0^n \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}dx-5n\int_{-1}^{0}\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}dx=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12},
\end{aligned}
$$

que en efecto son válidas.

1.3. Series generadoras

Una técnica estándar para demostrar recurrencias como (1.4), usada sistemáticamente en combinatoria y análisis, es la de *series generadoras*. En esta sección aplicamos este método para justificar la validez de la recurrencia integral de $S_m(n)$.

En general, recordamos que dada una sucesión numérica $\{a_m\}_{m\geq 0}$, su *serie generadora exponencial* se define por la serie de potencias formal $A(z):=\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m/m!$. La idea es que recurrencias satisfechas por la sucesión se vean reflejadas en ecuaciones funcionales satisfechas por $A(z)$. En nuestro caso, tenemos la siguiente:

Proposición 1.1. *Para cada $n \geq 1$, la serie generadora exponencial $S(n,z)$ de la sucesión $\{S_m(n)\}_{m\geq 0}$ está dada por*

$$S(n,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m(n)}{m!} z^m = \frac{e^{z(n+1)} - e^z}{e^z - 1}. \tag{1.5}$$

Demostración. Utilizando la serie de Taylor en el origen de la función exponencial $e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}$, vemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m(n)}{m!} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^m z^m}{m!} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(jz)^m}{m!} = e^z + e^{2z} + \cdots + e^{nz} = \frac{e^{z(n+1)} - e^z}{e^z - 1},$$

donde la última igualdad se justifica al ser una suma geométrica. □

La proposición anterior muestra que $S_m(x)$ de hecho está definida para $x \in \mathbb{R}$. En efecto, aplicando la fórmula de Taylor para series de potencias vemos que

$$\frac{\partial^m S}{\partial z^m}(x,0) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{e^z}{e^z - 1}(e^{xz} - 1) \right) \Bigg|_{z=0} = S_m(x).$$

En particular, $S_0(x) = S(x,0) = \lim_{z\to 0} S(x,z) = x$.

Con este análisis preliminar estamos en posición de dar una demostración sólida de la recurrencia integral (1.4).

Proposición 1.2. *La sucesión $\{S_m(x)\}_{m\geq 0}$ satisface la recurrencia integral*

$$\frac{S_{m+1}(x)}{m+1} = \int_0^x S_m(t)dt - x \int_{-1}^0 S_m(t)dt, \qquad \textit{para todo } m \geq 0. \tag{1.6}$$

En particular, cada $S_m(x)$ es un polinomio de grado $m+1$.

Demostración. Notemos que la serie generadora $S(x,z)$ satisface que

$$\begin{aligned}
\int_0^x S(t,z)dt - x \int_{-1}^0 S(t,z)dt &= \int_0^x \frac{e^{z(t+1)} - e^z}{e^z - 1} dt - x \int_{-1}^0 \frac{e^{z(t+1)} - e^z}{e^z - 1} dt \\
&= \frac{e^z}{e^z - 1} \left(\int_0^x (e^{zt} - 1)dt - x \int_{-1}^0 (e^{zt} - 1)dt \right) \\
&= \frac{e^z}{e^z - 1} \left(\frac{e^{zx} - 1}{z} - x - x\frac{1 - e^{-z}}{z} + x \right) \\
&= \frac{1}{z} \left(\frac{e^{z(x+1)} - e^z}{e^z - 1} - x \right).
\end{aligned}$$

En otras palabras, la función $S(x,z)$ satisface la ecuación

$$\int_0^x S(t,z)dt - x \int_{-1}^0 S(t,z)dt = \frac{S(x,z) - x}{z}.$$

Como $S_0(x) = x$, vemos que

$$\frac{S(x,z) - x}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_m(x)}{m!} z^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_{m+1}(x)}{(m+1)!} z^m.$$

Pero como

$$\int_0^x S(t,z)dt - x\int_{-1}^0 S(t,z)dt = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_0^x S_m(t)dt - x\int_{-1}^0 S_m(t)dt\right)\frac{z^m}{m!},$$

el resultado se sigue de igualar los coeficientes de cada potencia de z. □

Al diferenciar respecto a x la ecuación anterior obtenemos que

$$\frac{S'_{m+1}(x)}{m+1} = S_m(x) - \int_{-1}^0 S_m(t)dt, \quad \text{para todo } m \geq 0, \tag{1.7}$$

que será útil más adelante.

Recordemos que de la recurrencia integral para $S_m(n)$ se deduce que el coeficiente que multiplica a n está dado por la suma alternada de los demás coeficientes, que coincide con la integral dada en (1.6). Por otro lado, teniendo en cuenta la fórmula (1.2) dada por Bernoulli, el coeficiente que acompaña a n es el número de Bernoulli B_m. Por tanto, estos términos coinciden, es decir,

$$B_m = -m\int_{-1}^0 S_{m-1}(t)dt, \quad m \geq 2. \tag{1.8}$$

Usando esta relación, vemos que la serie generadora exponencial de los números de Bernoulli es

$$\begin{aligned} B(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}z^m &= 1 - \frac{z}{2} - \int_{-1}^0 \sum_{m=2}^{\infty}\frac{S_{m-1}(t)}{(m-1)!}z^m dt \\ &= 1 - \frac{z}{2} - z\int_{-1}^0 S(t,z) - t dt \\ &= 1 - \frac{z}{2} - \frac{ze^z}{e^z-1}\left(\frac{1-e^{-z}}{z} - 1\right) - \frac{z}{2} = \frac{ze^z}{e^z-1} - z = \frac{z}{e^z-1}. \end{aligned}$$

De esta fórmula, multiplicando las series de potencias $(e^z-1)B(z)$ y comparando los términos de cada potencia de z, vemos porqué la recurrencia (1.3) es válida. Por otra parte, esta serie generadora demuestra que

$$B_{2k+1} = 0, \quad \text{para todo } k \geq 1. \tag{1.9}$$

En efecto,

$$B(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}.$$

Pero esta última es una función par porque $\frac{(-z)}{2}\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1} = \frac{(-z)}{2}\frac{1+e^z}{1-e^z} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$. Por tanto, sus coeficientes impares deben ser cero como se quería mostrar.

Otra posibilidad para estudiar estas sumas es considerar

$$S_m(n-1) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m.$$

Estas funciones también resultan ser polinomios en n, y verifican la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Los polinomios $S_m(x-1)$ satisfacen la recurrencia integral:*

$$\frac{S_{m+1}(x-1)}{m+1} = \int_0^x S_m(t-1)dt - x\int_0^1 S_m(t-1)dt, \quad m \geq 0. \tag{1.10}$$

Demostración. Aplicando la Proposición 1.2 evaluada en $x-1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{S_{m+1}(x-1)}{m+1} &= \int_0^{x-1} S_m(t)dt - (x-1)\int_{-1}^{0} S_m(t)dt \\ &= \int_1^{x} S_m(t-1)dt - (x-1)\int_0^1 S_m(t-1)dt = \int_0^x S_m(t-1)dt - x\int_0^1 S_m(t-1)dt,\end{aligned}$$

como se requería. □

Aplicando la proposición anterior, tras algunos cálculos, se obtienen los polinomios:

$$S_0(n-1) = n-1, \qquad S_3(n-1) = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$S_1(n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}, \qquad S_4(n-1) = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$S_2(n-1) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \qquad S_5(n-1) = \frac{n^6}{6} - \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.$$

De las fórmulas anteriores se deduce para $m \geq 2$, que el coeficiente del último término de $S_m(x-1)$ está dado por la suma de los demás coeficientes, salvo por el signo. En otras palabras,

$$B_m = -m\int_0^1 S_{m-1}(t-1)dt, \tag{1.11}$$

en concordancia con la ecuación (1.8).

Nota 1.1. La Proposición 1.2 demuestra que $S_m(n)$ se puede calcular recursivamente por simple integración, mostrando que

$$S_{m+1}(n) = (m+1)\int_0^n S_m(t)dt - (m+1)c_{m+1}n, \tag{1.12}$$

donde $c_{m+1} = \int_{-1}^0 S_m(t)dt$ es una constante. Otra forma de hallar la constante c_{m+1} es observando que de la definición a través de sumas, $S_m(1) = 1$. Por tanto, reemplazando $n = 1$ en la última ecuación, obtenemos

$$1 = S_{m+1}(n) = (m+1)\int_0^1 S_m(t)dt - (m+1)c_{m+1},$$

de donde deducimos que

$$c_{m+1} = \int_0^1 S_m(t)dt - \frac{1}{m+1}.$$

La recurrencia (1.12) con este valor de c_{m+1} es exactamente la recurrencia descrita en [44, p. 18-19].

1.4. Los polinomios de Bernoulli

La manera estándar de trabajar con las sumas de las m-ésimas potencias es a través de los polinomios de Bernoulli $B_m(x)$. Esta sección está dedicada a introducirlos y a desarrollar algunas de sus principales propiedades a partir del estudio de los polinomios $S_m(x)$ dados en la sección anterior.

La definición que adoptamos para los polinomios de Bernoulli es

$$B_m(x) := S'_m(x-1), \quad m \geq 0, \tag{1.13}$$

donde $'$ indica la derivada respecto a x. Integrando sobre $[0, n+1]$ vemos que estas funciones también están relacionadas por

$$S_m(x) = \int_0^{x+1} B_m(t)dt. \tag{1.14}$$

La siguiente proposición muestra que la definición adoptada coincide con la definición clásica de estos polinomios.

Proposición 1.4. *Los polinomios de Bernoulli satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Su serie generadora exponencial $B(x,z)$ está dada por*

$$B(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x)}{m!} z^m = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}.$$

2. *$B_m(x+1) - B_m(x) = mx^{m-1}$. En particular, se sigue que $B_m(1) = B_m(0) = B_m$.*

3. *$B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x)$.*

Demostración. Empleando la serie exponencial generadora $S(x,z)$ obtenemos, luego de derivar respecto a x, que

$$B(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S'_m(x-1)}{m!} z^m = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m(x-1)}{m!} z^m \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{xz} - e^z}{e^z - 1} \right) = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

Para la segunda afirmación recordemos que

$$S_m(n) = S_m(n-1) + n^m,$$

que es válida para todo número entero positivo n. Como estas son funciones polinomiales, dicha igualdad debe ser válida para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, $S_m(x) - S_m(x-1) = x^m$. Derivando respecto a x obtenemos la propiedad deseada. Además, evaluando en $x = 0$ vemos que $B_m(1) = B_m(0)$. Pero $B_m(1) = S'_m(0) = B_m$ al ser este el coeficiente que acompaña a x en $S_m(x)$. Otra forma alternativa es tomar $x = 0$ en $B(0,z) = \frac{z}{e^z - 1}$ y notar que esta coincide con la serie generador exponencial de los números de Bernoulli.

Para la última afirmación basta observar que $B(1-x, -z) = \frac{(-z)e^{-z(1-x)}}{e^{-z} - 1} = B(x,z)$ y comparar los coeficientes de cada potencia de z. $\square$

La recurrencia integral que determina los polinomios $S_m(x)$ induce inmediatamente una recurrencia del mismo tipo para los polinomios de Bernoulli. Esta fórmula parece novedosa y a conocimiento del autor no se encuentra en la bibliografía clásica sobre el tema.

Proposición 1.5. *Los polinomios de Bernoulli satisfacen la recurrencia integral*

$$\frac{B_{m+1}(x)}{m+1} = \int_0^x B_m(t)dt - \int_0^1 \int_0^t B_m(s)dsdt. \tag{1.15}$$

En particular, $B'_{m+1}(x) = (m+1)B_m(x)$.

Demostración. Para demostrar la ecuación (1.15), podemos derivar respecto a x en (1.10) y así obtener

$$\frac{S'_{m+1}(x-1)}{m+1} = S_m(x-1) - \int_0^1 S_m(t-1)dt.$$

El resultado entonces se sigue de la ecuación (1.14). Finalmente, la última afirmación se sigue de derivar (1.15) respecto a x.

□

Mediante esta fórmula vemos que comenzando con $B_0(x) = 1$, los primeros polinomios de Bernoulli son:

$$B_1(x) = \int_0^x 1\,dt - \int_0^1 \int_0^x 1\,dtdx = x - \frac{1}{2}, \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \qquad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}, \qquad B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}.$$

A partir de las proposiciones anteriores podemos recuperar propiedades clásicas de estos polinomios. Por ejemplo, una primera consecuencia es

$$S_m(n) = \int_0^{n+1} B_m(t)dt = \int_0^{n+1} \frac{B'_{m+1}(t)}{m+1}dt = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}.$$

Por otra parte, desarrollando la multiplicación en la serie generadora $B(x,z) = B(z)e^{xz}$ obtenemos

$$B_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B_j x^{m-j}, \quad m \geq 0.$$

Una propiedad que se deduce fácilmente de (1.15) es obtener B_{m+1} a partir del polinomio $B_m(x)$, es decir,

$$B_{m+1} = -(m+1)\int_0^1 \int_0^t B_m(s)dsdt, \tag{1.16}$$

pues basta evaluar en $x = 0$ dicha ecuación. También podemos observar que

$$\int_0^1 B_{m+1}(x)dx = 0. \tag{1.17}$$

En efecto, podemos utilizar (1.15) para obtener

$$\int_0^1 \frac{B_{m+1}(x)}{m+1}dx = \int_0^1 \int_0^x B_m(t)dtdx - \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_0^t B_m(s)dsdt\right)dx = 0,$$

dado que el término en paréntesis es una constante.

Finalmente, mencionamos que

$$B_m\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-m}B_m(2x) - B_m(x). \tag{1.18}$$

Esta identidad se sigue de la ecuación

$$\frac{z}{e^z - 1}e^{(x+1/2)z} = 2\frac{z/2}{e^{z/2}-1}e^{xz} - \frac{z}{e^z - 1}e^{xz},$$

tras expandir en series de potencias e igualar los coeficientes de cada potencia de z. El lector puede consultar más propiedades sobre estos polinomios en [5, 32].

1.5. Los polinomios de Euler

Como mencionamos al inicio del capítulo, el mismo análisis hecho a las sumas $S_m(n)$ puede ser aplicado a las sumas alternadas $A_m(n) = 1^m - 2^m + 3^m - \cdots + (-1)^{n+1}n^m$. En este caso, los polinomios que resultan son los llamados polinomios de Euler, íntimamente relacionados con los polinomios de Bernoulli. El objeto de esta sección será desarrollar sus propiedades y por supuesto una recurrencia integral para calcularlos.

Comencemos por observar que $A_0(n)$ es igual a 0 o 1 dependiendo de la paridad de n. No es difícil comprobar entonces que

$$A_0(n) = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2},$$

que no es propiamente un polinomio en n. Por otra parte, es posible demostrar por inducción sobre n que

$$A_1(n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}.$$

Para obtener una manera sistemática de demostrar estas afirmaciones y poder calcular las fórmulas correspondientes para valores mayores de m, nos apoyamos nuevamente en las series generadoras.

Proposición 1.6. *La serie generadora exponencial $A(n,z)$ de la sucesión $\{A_m(n)\}_{m\geq 0}$ está dada por*

$$A(n,z) := \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m(n)}{m!}z^m = (-1)^{n+1}\frac{e^{z(n+1)}}{e^z+1}+\frac{e^z}{e^z+1}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Demostración. Basta emplear la serie de Taylor de la función exponencial para observar que

$$A(n,z) = e^z - e^{2z} + e^{3z} - \cdots + (-1)^{n+1}e^{nz} = e^z(1-e^z+\cdots+(-e^z)^{n-1}),$$

de donde se sigue el resultado tras aplicar una suma geométrica. □

En vista de esta proposición, es natural considerar los polinomios generados por la función $e^{xz}/(e^z+1)$. En este caso, es común introducir la siguiente definición.

Definición 1. Los *polinomios de Euler* $E_m(x)$ se definen a través de la serie generadora

$$E(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{E_m(x)}{m!}z^m = \frac{2e^{zx}}{e^z+1}. \tag{1.20}$$

En términos de estas funciones observamos entonces que

$$A_m(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}E_m(n+1)+\frac{E_m(1)}{2}. \tag{1.21}$$

Debemos comprobar que en efecto cada $E_m(x)$ es un polinomio en x. Para ello demostramos la siguiente afirmación.

Proposición 1.7. *Los polinomios de Euler satisfacen la recurrencia integral*

$$\frac{E_{m+1}(x)}{m+1} = \int_0^x E_m(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 E_m(t)dt, \quad m\geq 0. \tag{1.22}$$

En particular, $E'_{m+1}(x) = (m+1)E_m(x)$.

Demostración. Basta calcular

$$\int_0^x E(t,z)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 E(t,z)dt = \frac{2}{e^z+1}\frac{e^z-1}{z} - \frac{1}{e^z+1}\frac{e^z-1}{z} = \frac{2e^{xz}-e^z-1}{z(e^z+1)} = \frac{E(x,z)-1}{z},$$

y luego igualar los coeficientes de cada potencia de z. En efecto,

$$\int_0^x E(t,z)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 E(t,z)dt = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_0^x E_m(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 E_m(t)dt\right)\frac{z^m}{m!},$$

y $(E(x,z)-1)/z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_{m+1}(x)}{(m+1)!} z^m$, al igual que en la demostración de la Proposición 1.2. □

Podemos hallar los primeros polinomios de Euler mediante la recurrencia integral (1.22) empezando con $E_0(x) = E(x,0) = 1$ y continuando con

$$E_1(x) = \int_0^x dt - \frac{1}{2}\int_0^1 dt = x - \frac{1}{2}, \qquad E_2(x) = x^2 - x,$$

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{4}, \qquad E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x,$$

$$E_5(x) = x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{2}, \qquad E_6(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x.$$

Por otra parte, $A_m(n)$ se expresa en términos de $E_m(x+1)$. Asociados a estos polinomios también tenemos una recurrencia integral como se describe a continuación.

Proposición 1.8. *Los polinomios $E_m(x+1)$ satisfacen*

$$\frac{E_{m+1}(x+1)}{m+1} = \int_0^x E_m(t+1)dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 E_m(t+1)dt. \tag{1.23}$$

Demostración. A partir de (1.22) evaluada en $x+1$ obtenemos

$$\frac{E_{m+1}(x+1)}{m+1} = \int_0^{x+1} E_m(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 E_m(t)dt = \int_{-1}^x E_m(t+1)dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 E_m(t+1)dt,$$

de donde se sigue el resultado. □

De esta manera vemos que los primeros polinomios $E_m(x+1)$ son

$$E_1(x+1) = x + \frac{1}{2}, \qquad E_2(x+1) = x^2 + x,$$

$$E_3(x+1) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{4}, \qquad E_4(x+1) = x^4 + 2x^3 - x,$$

$$E_5(x+1) = x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + \frac{1}{2}, \qquad E_6(x+1) = x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x,$$

y a su vez determinamos una fórmula cerrada para cada $A_m(n)$. Por ejemplo,

$$A_2(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(n^2+n\right), \qquad A_3(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(n^3 + \frac{3n}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8},$$

$$A_4(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(n^4 + 2n^3 - n\right), \qquad A_5(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(n^5 + \frac{5n^4}{2} - \frac{5n^2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

En la siguiente proposición recopilamos algunas de las propiedades principales de los polinomios de Euler que se observan en los casos particulares mostrados arriba.

Proposición 1.9. *La familia de polinomios $E_m(x)$ satisface:*

1. $E_m(x+1) + E_m(x) = 2x^m$ *y* $E_m(x+1) = (-1)^m E_m(-x)$.
2. $E_m(1-x) = (-1)^m E_m(x)$.
3. $E_m(1) = -E_m(0)$ *y* $E_{2k}(0) = 0$, *para todo* $k \geq 1$.

Demostración. Para la primera afirmación note que

$$E(x+1,z) = \frac{2e^{xz}e^z}{e^z+1} = 2e^{xz}\left(1 - \frac{1}{e^z+1}\right) = 2e^{xz} - E(x,z), \quad E(x+1,z) = \frac{2e^{xz}}{e^{-z}+1} = E(-x,-z).$$

Ambas fórmulas se siguen de igualar los coeficientes de cada potencia de z, en ambas ecuaciones. Para la segunda, note que

$$E(1-x,z) = \frac{2e^z e^{-xz}}{e^z+1} = \frac{2e^{-xz}}{e^{-z}+1} = E(x,-z),$$

de donde deducimos que $E_m(1-x) = (-1)^m E_m(x)$.

Reemplazando $x = 0$ en $E_m(x+1) + E_m(x) = 2x^m$ vemos que $E_m(1) = -E_m(0)$. De la misma forma, $E_m(1) = (-1)^m E_m(0)$. Así que si m es par $E_m(0) = -E_m(0)$, es decir, es cero. Otra forma de verificar esta afirmación es comprobar que la función $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{m!} z^m = \frac{2}{e^z+1} - 1 = \frac{1-e^z}{1+e^z}$, es impar. En efecto,

$$\frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}} = \frac{1-e^{-z}}{1+e^{-z}}\frac{e^z}{e^z} = \frac{e^z-1}{e^z+1} = -\frac{1-e^z}{1+e^z}.$$

Por tanto, los coeficientes correspondientes a las potencias pares de z son cero. □

Proposición 1.10. *Los polinomios de Euler se pueden expresar en términos de los polinomios de Bernoulli a través de la fórmula*

$$nE_{n-1}(x) = 2^n\left(B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2B_n(x) - 2^{n+1}B_n\left(\frac{x}{2}\right), \qquad n \geq 1.$$

Demostración. Empleando las funciones generadoras vemos que

$$zE(x,z) = 2ze^{xz}\frac{e^z-1}{e^{2z}-1} = \frac{2ze^{(x+1)z}}{e^{2z}-1} - \frac{2ze^{xz}}{e^{2z}-1} = B\left(\frac{x+1}{2}, 2z\right) - B\left(\frac{x}{2}, 2z\right).$$

Como $zE(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{n-1}(x)}{(n-1)!} z^n$, la primera igualdad queda justificada. Para la segunda basta con recordar la ecuación (1.18). □

Capítulo 2

Sucesiones de Appell

El objeto de este capítulo es presentar el formalismo de las sucesiones de Appell como herramienta para unificar y generalizar los resultados obtenidos sobre los polinomios de Bernoulli y Euler. Además de recopilar caracterizaciones conocidas en el Teorema 2.1, como su fórmula a través de determinantes, presentamos una nueva recurrencia integral determinada por el funcional lineal sobre el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$ que define la sucesión en cuestión. Por otra parte, en este resultado explicamos cómo la nueva recurrencia resulta ser equivalente a las demás descripciones. Nuestro resultado principal también generaliza caracterizaciones del mismo tipo para varias familias como los polinomios de Bernoulli hipergeométricos [22] y de Kummer-Bernoulli [19]. Por otra parte, recordamos como una sucesión de Appell da lugar a versiones más generales del teorema de Taylor. Como aplicación recordamos también las fórmulas de sumación de Euler-MacLaurin y Euler-Boole que a su vez proveen demostraciones diferentes de las fórmulas para $S_m(n)$ y $A_m(n)$ dadas en el capítulo anterior.

2.1. Propiedades generales y caracterizaciones

Una *sucesión de Appell* es una sucesión de polinomios en una variable $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ que satisfacen la recurrencia

$$\frac{dp_n}{dx}(x) = np_{n-1}(x), \qquad n \geq 1, \tag{2.1}$$

y donde $p_0(x)$ es una constante distinta de cero. Estas familias de polinomios fueron introducidas y estudiadas por P.E. Appell en 1880 [6].

Una manera alternativa para describir esta relación es considerar los polinomios $P_n(x) = p_n(x)/n!$ que a su vez satisfarán

$$\frac{dP_n}{dx}(x) = P_{n-1}(x), \qquad n \geq 1. \tag{2.2}$$

Integración sucesiva de la relación (2.2) demuestra que cada P_n es polinomio de grado n. En efecto, aplicando el teorema fundamental del cálculo observamos que

$$P_n(x) = \int_0^x P_{n-1}(t)dt + P_n(0).$$

Si llamamos $c_n := P_n(0)$, entonces obtenemos recursivamente

$$P_0(x) = c_0, \qquad P_1(x) = c_0x + c_1, \qquad P_2(x) = c_0\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2,$$

$$P_3(x) = c_0\frac{x^3}{3!} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3, \qquad P_4(x) = c_0\frac{x^4}{4!} + c_1\frac{x^3}{3!} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

Luego, es fácil demostrar por inducción sobre n que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} P_k(0)\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}, \qquad n \geq 0. \tag{2.3}$$

Recíprocamente, es claro que si definimos P_n por la ecuación (2.3), entonces $P_n' = P_{n-1}$ y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ define una sucesión de Appell.

Por otra parte, para una sucesión de Appell podemos escribir

$$\begin{aligned} P_n(t+x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k\frac{(x+t)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{t^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\frac{x^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} c_k\frac{t^{n-j-k}}{(n-j-k)!}\frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} P_{n-j}(t)\frac{x^j}{j!}. \end{aligned}$$

En conclusión, toda sucesión de Appell satisface

$$P_n(t+x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}. \tag{2.4}$$

En la dirección contraria, si asumimos que esta relación es válida para una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\geq 0}$, tomando en particular $t = 0$ recuperamos la ecuación (2.3) y por tanto la sucesión dada es de Appell.

Otra aproximación al estudio de estas familias de polinomios es empleando las series generadoras como en el caso de los polinomios de Bernoulli y de Euler. En efecto, consideremos

$$P(x,z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n, \tag{2.5}$$

la serie generadora de $\{P_n\}_{n\geq 0}$. En general sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,z) - zP(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} = P_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(P_n'(x) - P_{n-1}(x))z^n.$$

Por tanto la condición de Appell (2.1) se traduce en la ecuación diferencial

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,z) = zP(x,z),$$

satisfecha por $P(x,z)$. Por otra parte, si definimos $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = P(0,z)$, sabemos que el producto de Cauchy de series viene dado por

$$C(z)e^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)z^n = P(x,z).$$

Por tanto, la serie generadora de una sucesión de Appell toma la forma $P(x,z) = C(z)e^{xz}$, para alguna serie de potencias formal $C(z)$ tal que $C(0) = c_0 \neq 0$. Esta escritura rectifica la ecuación (2.4) que será equivalente a la igualdad

$$P(x+t,z) = C(z)e^{(x+t)z} = e^{xz}P(t,z).$$

Resumiendo esta discusión, hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de polinomios con* $P_0(x)$ *igual a una constante no nula. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de Appell, esto es, satisface las ecuaciones (2.2).*
2. $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$, *para una sucesión de constante* $\{c_n\}_{n\geq 0}$. *En este caso* $c_n = P_n(0)$, *para todo* $n \geq 0$.
3. *Estos polinomios satisfacen la ecuación (2.4), a saber* $P_n(t + x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t) \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$.
4. *Su serie generadora* $P(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$ *es de la forma* $P(x, z) = C(z)e^{xz}$, *donde* $C(z)$ *es una serie de potencias formal tal que* $C(0) \neq 0$. *En este caso* $C(z) = P(0, z)$.

En general, si no se imponen condiciones extras sobre los coeficientes c_n estos pueden ser arbitrarios. Sin embargo, existe una alternativa para determinarlos a través de un funcional

$$\mu : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \qquad \text{tal que } \mu(1) \neq 0,$$

aproximación desarrollada en tratados clásicos como [13]. Esta aproximación requiere además que la sucesión de Appell satisfaga

$$P_0 \cdot \mu(1) = 1, \qquad \mu(P_n) = 0, \qquad n \geq 1.$$

Antes de proseguir vale la pena notar que μ está determinada por sus valores en los monomios $\{x^n\}_{n\geq 0}$, que conforman una base de $\mathbb{R}[x]$. Los números

$$\mu_k := \mu(x^k),$$

suelen llamarse los *momentos* de μ. Por otra parte, es posible extender la acción de μ a series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)z^n$, donde los Q_n son polinomios. Estas incluyen por supuesto el caso de funciones analíticas. En efecto, basta con considerar la asignación

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)z^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mu(Q_n)z^n.$$

En el caso convergente nos restringimos a valores reales de z donde la series resultante sea convergente. De esta manera, podemos codificar el funcional μ a través de la serie exponencial generadora

$$M_\mu(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(x^n)\frac{z^n}{n!},$$

y vemos que M_μ no es otra que la serie correspondiente a e^{xz}, es decir, $M_\mu(z) = \mu(e^{xz})$.

Para simplificar los cálculos que haremos a continuación supondremos que $P_0 = \mu(1) = 1$. Si requerimos que $\mu(P_n) = 0$, aplicando μ a la ecuación (2.3) concluimos que estas condiciones son equivalentes a que los coeficientes c_n satisfagan las ecuaciones

$$c_0 = 1, \qquad c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\mu(x^{n-k})}{(n-k)!} = 0, \qquad n \geq 1. \tag{2.6}$$

Esto demuestra que los coeficientes c_n quedan unívocamente determinados.

Ahora bien, podemos aplicar el funcional μ a las demás relaciones satisfechas por la sucesión de Appell $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y dar otras caracterizaciones. Todas ellas están descritas en el siguiente teorema que extiende los resultados descritos en [16]. La propiedad (2) abajo enunciada se denomina *propiedad del valor medio* y aparece descrita para sucesiones de Appell que provienen de variables aleatorias [43, Proposition 2.7]. Por otra parte, la propiedad (4) no parecen estar descritas en la literatura sobre el tema.

Teorema 2.1. *Sea $\mu : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $\mu(1) = 1$. Entonces existe una única sucesión de Appell $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ que satisface $\mu(P_0) = 1$ y $\mu(P_n) = 0$, para todo $n \geq 1$. Además, esta sucesión también se caracteriza por las siguientes propiedades equivalentes entre si:*

1. *$\mu(P_0) = 1$ y $\mu(P_n) = 0$, para todo $n \geq 1$.*
2. *$\mu(P_n(x + x_0)) = \frac{x_0^n}{n!}$, para todo $n \geq 0$ y todo $x_0 \in \mathbb{R}$.*
3. *Su serie generadora es $P(x, z) = e^{xz}/M_\mu(z)$, con $M_\mu(z) = \mu(e^{xz})$. En otras palabras,*
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_{n-k} P_k(x). \tag{2.7}$$
4. *P_n se calcula recursivamente por las fórmulas $P_0 = 1$ y*
$$P_n(x) = \int_{x_0}^{x} P_{n-1}(t)dt - \mu\left(\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(t)dt\right),$$
para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
5. *$P_0 = 1$ y P_n admite la fórmula como determinante*
$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\mu_1 & \cdots & \binom{n-1}{1}\mu_{n-2} & \binom{n}{1}\mu_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2}\mu_{n-3} & \binom{n}{2}\mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1}\mu_1 \end{vmatrix}.$$

Demostración. Por la discusión en los párrafos anteriores vemos que la condición $\mu(P_n) = 0$, $n \geq 1$, es equivalente a las ecuaciones (2.6). Esto demuestra que existe una única sucesión de Appell $\{P_n\}_{n\geq 0}$ que satisface (1). Esta sucesión también satisfará (2), porque aplicando μ a ambos lados de la ecuación (2.4) vemos que

$$\mu(P_n(x + x_0)) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \frac{x_0^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!},$$

para todo $n \geq 0$ y todo x_0. Recíprocamente, si requerimos que una sucesión de Appell satisfaga (2), cancelando el término $x_0^n/n!$ de la ecuación anterior vemos que (2) es equivalente a las ecuaciones

$$\mu(P_1) = 0, \quad \mu(P_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu(P_k) \frac{x_0^{n-k}}{(n-k)!} = 0, \quad n \geq 2.$$

Luego concluimos que $\mu(P_n) = 0$, para todo $n \geq 1$, inductivamente.

Para la equivalencia entre (1) y (3) note que al aplicar μ a $P(x, z) = C(z)e^{xz}$ obtenemos

$$\mu(C(z)e^{xz}) = C(z)\mu(e^{xz}) = C(z)M_\mu(z).$$

Pero por otro parte,

$$\mu(P(x, z)) = \mu\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(P_n)z^n.$$

Si suponemos (1), entonces $\mu(P(x,z)) = \mu(P_0) = 1$ y así $C(z) = 1/M_\mu(z)$. Recíprocamente, si $P(x,z) = e^{xz}/M_\mu(z)$, entonces $\mu(P(x,z)) = \mu(e^{xz}/M_\mu(z)) = M_\mu(z)/M_\mu(z) = 1$ y por tanto (1) se satisface. Además, al igualar potencias de z en la ecuación $P(x,z)M_\mu(z) = e^{xz}$ obtenemos la ecuación (2.7).

Para mostrar que (1) y (4) son equivalentes, observamos que si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Appell, por el teorema fundamental del cálculo sabemos que

$$P_n(x) - P_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} P_{n-1}(t)dt.$$

Si (1) se satisface entonces al aplicar μ en ambos lados de esta ecuación concluimos que

$$-P_n(x_0) = \mu(P_n - P_n(x_0)) = \mu\left(\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(t)dt\right),$$

de donde se sigue el resultado. Recíprocamente, si (4) define dicha sucesión de polinomios, vemos que $P_n' = P_{n-1}$ tomando la derivada con respecto a x, y por tanto la sucesión es de Appell. Además, aplicando μ a dicha ecuación concluimos

$$\mu(P_n) = \mu\left(\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(t)dt\right) - \mu\left(\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(t)dt\right) = 0,$$

y por tanto satisface (1).

Finalmente, para (5) es suficiente demostrar que dicho determinante define una sucesión de Appell que satisface (1). Por unicidad se sigue que los polinomios determinados por (1) estarán dados por estos determinantes. Primero, al calcular $\mu(P_n)$ basta con aplicar μ a la primera fila de dicha matriz. Así,

$$\mu(P_n) = \frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} \mu(1) & \mu(x) & \mu(x^2) & \cdots & \mu(x^{n-1}) & \mu(x^n) \\ 1 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\mu_1 & \cdots & \binom{n-1}{1}\mu_{n-2} & \binom{n}{1}\mu_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2}\mu_{n-3} & \binom{n}{2}\mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1}\mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

dado que las dos primeras filas son iguales. Ahora, para comprobar la condición (2.3), como el determinante es una función multilineal pero la única fila con entradas no constantes es la primera obtenemos

$$P_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & \cdots & (n-1)x^{n-2} & nx^{n-1} \\ 1 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\mu_1 & \cdots & \binom{n-1}{1}\mu_{n-2} & \binom{n}{1}\mu_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2}\mu_{n-3} & \binom{n}{2}\mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1}\mu_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 & \cdots & (n-1)x^{n-2} & nx^{n-1} \\ 1 & \binom{2}{1}\mu_1 & \binom{3}{1}\mu_2 & \cdots & \binom{n-1}{1}\mu_{n-2} & \binom{n}{1}\mu_{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{3}{2}\mu_1 & \cdots & \binom{n-1}{2}\mu_{n-3} & \binom{n}{2}\mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n}{n-1}\mu_1 \end{vmatrix},$$

donde hemos desarrollamos el primer determinante a lo largo de la primera columna. Esta matriz cuadrada de tamaño n, salvo por su primera fila, tiene en su entrada (i,j) el valor $\binom{j}{i-1}\mu_{j-i+1}$, $2 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, y donde interpretamos el coeficiente binomial como cero si $i-1>j$.

La matriz inicial en (5) es cuadrada de tamaño $n+1$, y salvo por su primera fila, tiene en su entrada (i,j) el valor $\binom{j-1}{i-2}\mu_{j-i+1}$, $2 \le i \le n+1$, $1 \le j \le n+1$. Como

$$\binom{j}{i-1} = \frac{j}{i-1}\binom{j-1}{i-2},$$

podemos factorizar de la fila j-ésima el valor j, $1 \le j \le n$, y de la fila i-ésima el valor $1/(i-1)$, $2 \le i \le n$ y así obtener

$$P_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\mu_1 & \cdots & \binom{n-2}{1}\mu_{n-3} & \binom{n-1}{1}\mu_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-2}{2}\mu_{n-4} & \binom{n-1}{2}\mu_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n-1}{n-2}\mu_1 \end{vmatrix} = P_{n-1}(x),$$

como queríamos demostrar. □

El numeral (4) del teorema anterior muestra una manera recursiva de calcular el polinomio n-ésimo de una sucesión de Appell a partir del anterior. Si tomamos $x_0 = 0$ obtenemos el siguiente resultado, del cual incluimos otras dos demostraciones.

Corolario 2.1. *Sea $\mu : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $\mu(1) = 1$ y $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$ la sucesión de Appell determinada por μ. Entonces*

$$P_n(x) = \int_0^x P_{n-1}(t)dt - \mu\left(\int_0^x P_{n-1}(t)dt\right),$$

y $c_n = -\mu\left(\int_0^x P_{n-1}(t)dt\right)$.

Demostración. Empleando series generadoras, vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^x P(u,z)du - \mu\left(\int_0^x P(u,z)du\right) &= \int_{x_0}^x \frac{e^{uz}}{M_\mu(z)}du - \mu\left(\int_0^x \frac{e^{uz}}{M_\mu(z)}du\right) \\ &= \frac{1}{zM_\mu(z)}\left(e^{xz} - 1 - \mu\left(e^{xz}-1\right)\right) \\ &= \frac{e^{xz} - M_\mu(z)}{zM_\mu(z)} = \frac{P(x,z)-1}{z},\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\frac{P(x,z)-1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)z^n$, basta con igualar coeficientes de z^n para concluir el resultado. Otra demostración consiste en usar directamente la fórmula (2.6). Así,

$$\begin{aligned}-\mu\left(\int_0^x P_{n-1}(t)dt\right) &= -\mu\left(\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{t^{n-1-k}}{(n-1-k)!}dt\right) \\ &= -\mu\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\mu(x^{n-k})}{(n-k)!} = c_n = P_n(0),\end{aligned}$$

como queríamos comprobar. □

Veremos en la siguiente sección como este corolario generaliza las recurrencias integrales demostradas en el primer capítulo para los polinomios de Bernoulli y de Euler. Por otra parte, recordemos que inicialmente partimos de las sumas $S_m(n)$ y su recurrencia integrales, de donde dedujimos una recurrencia análoga para $B_m(x+1) = S'_m(x)$. Esto es un caso particular del siguiente hecho general.

Corolario 2.2. *Si $\{P_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Appell determinada por μ, entonces los polinomios*

$$Q_n(x) := \int_0^x P_n(t)dt, \qquad \textit{satisfacen} \qquad Q_n(x) = \int_0^x Q_{n-1}(t)dt - \mu(Q_{n-1})x.$$

Además su serie generadora $Q(x,z)$ está dada por

$$Q(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)z^n = C(z)\frac{e^{xz}-1}{z}.$$

Demostración. En términos de Q_n, el teorema anterior afirma que

$$Q'_n(x) = Q_{n-1}(x) - \mu(Q_{n-1}).$$

Teniendo en cuenta que $Q_n(0) = 0$, al integrar sobre $[0,x]$, se concluye la recurrencia. Para la segunda afirmación, basta integrar sobre $[0,x]$ la serie generadora $P(x,z)$ para obtener

$$Q(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)z^n = \int_0^x P(t,z)dt = C(z)\int_0^x e^{tz}dt = C(z)\frac{e^{xz}-1}{z},$$

como se esperaba. □

Finalizamos esta sección con ejemplos de tipo general sobre construcciones de sucesiones de Appell a partir de sucesiones dadas.

Ejemplo 2.1 (Traslaciones y homotecias)**.** Si $\{P_n(x))\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Appell como en (2.2), es inmediato comprobar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{P_n(x-\alpha))\}_{n\geq 0}$ también es de Appell. Además su serie generadora será

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-\alpha)z^n = P(x-\alpha,z) = C(z)e^{-\alpha z}e^{xz}.$$

Por otra parte, si la sucesión inicial es generada por la aplicación lineal μ, sabemos que $M_\mu(z)C(z) = 1$, y por tanto $e^{\alpha z}M_\mu(z)$ corresponderá a la aplicación μ_α que genera a $\{P_n(x-\alpha))\}_{n\geq 0}$. Como

$$e^{\alpha z}M_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_k}{k!}\frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\mu\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\alpha^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\mu((x+\alpha)^n)\frac{z^n}{n!},$$

concluimos que $\mu_\alpha : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ dada por $\mu\alpha = \mu \circ T_\alpha$ donde

$$T_\alpha : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad T_a(f)(x) = f(x+\alpha),$$

es una traslación. Por tanto $\mu_\alpha(x^n) = \mu((x+\alpha)^n)$, y μ_α genera esta nueva sucesión de Appell.

Ahora, si $\alpha \neq 0$, $\{\alpha^{-n}P_n(\alpha x)\}_{n\geq 0}$ también es una sucesión de Appell, puesto que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{-n}P_n(\alpha x)z^n = C(z/\alpha)e^{\alpha x(z/\alpha)} = C(z/\alpha)e^{xz}.$$

Además, es fácil comprobar que el funcional asociado será $\mu'_\alpha : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\mu\alpha = \mu \circ H_\alpha$ donde

$$H_\alpha : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad H_a(f)(x) = f(x/\alpha),$$

es una homotecia. Por tanto, $\mu'_\alpha(x^n) = \mu((x/\alpha)^n) = \alpha^{-n}\mu(x^n)$.

Ejemplo 2.2 (Shitfs)**.** Dado un funcional μ tal que $\mu_1 = \mu(x) \neq 0$, podemos considerar la serie de potencias

$$\frac{M_\nu(z)-1}{\mu_1 z} = \frac{1}{\mu_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{n!}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_1\cdot(n+1)}\frac{z^n}{n!},$$

donde desplazamos cada potencia de z una unidad menos. En este caso, el funcional asociado a esta serie es

$$\mu^+(f) = \mu_1^{-1}\cdot\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right).$$

En efecto,

$$M_{\mu^+}(z) = \mu^+(e^{xz}) = \mu_1^{-1}\mu\left(\int_0^x e^{zt}dt\right) = \mu_1^{-1}\mu\left(\frac{e^{zx}-1}{z}\right) = \frac{M_\mu(z)-1}{\mu_1 z},$$

y también $\mu^+(x^n) = \mu_{n+1}/\mu_1$.

Ejemplo 2.3 (Composición umbral de sucesiones de Appell)**.** Sean $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ sucesiones de Appell. Entonces la sucesión definida por

$$(Q_n\square P_n)(x) := \sum_{k=0}^{n}P_k(0)Q_{n-k}(x),$$

es de nuevo una sucesión de Appell. Esta operación consiste en reemplazar cada monomio $x^j/j!$ por Q_j en la expansión de cada P_n. Es fácil comprobar que en efecto estos polinomios son de Appell dado que

$$(Q_n\square P_n)'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}P_k(0)Q'_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}P_k(0)Q_{n-1-k}(x) = (Q_{n-1}\square P_{n-1})'(x).$$

Por otra parte, si $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n = C(z)e^{xz}$ y $\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)z^n = D(z)e^{xz}$, entonces

$$C(z)D(z)e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty}(Q_n\square P_n)(x)z^n,$$

dando naturalidad a la definición de esta composición.

Ahora bien, si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es inducida por un funcional μ y $\{q_n\}_{n\geq 0}$ es inducida por ν, entonces el funcional

$$(\mu\circ\nu)(f) := \sum_{n=0}^{\infty}\mu(f^{(n)})\frac{\nu(x^n)}{n!},$$

induce la composición umbral. En efecto,

$$M_{\mu\circ\nu}(z) = (\mu\circ\nu)(e^{xz}) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu(z^n e^{xz})\frac{\nu(x^n)}{n!} = \mu(e^{xz})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu(x^n)z^n}{n!} = M_\mu(z)M_\nu(z),$$

como era requerido.

2.2. Ejemplos clásicos I

Damos paso a ejemplos concretos ilustrando las propiedades de sucesiones de Appell asociadas a varios funcionales μ. En particular, recuperamos como casos particulares, las recurrencias integrales y ecuaciones en diferencias de los polinomios de Bernoulli y Euler obtenidas en el capítulo anterior.

Ejemplo 2.4 (Monomios)**.** La aplicación lineal de evaluación en un punto fijado a,

$$\mu(f) = f(a),$$

produce los momentos $\mu(x^n) = a^n$, $M_\mu(z) = e^{az}$ y $P(x,z) = e^{-az}e^{xz} = e^{(x-a)z}$. Este es el caso más sencillo donde los polinomios toman la forma

$$P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Ejemplo 2.5 (Aproximación de la exponencial)**.** Considere el funcional $\mu(f) = f(0) - f'(0)$, para el cual $M_\mu(z) = 1 - z$. Por tanto, la función generadora es

$$\frac{e^{xz}}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j x^j}{j!(1-z)} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} z^n \frac{x^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \right) z^n.$$

Por tanto la sucesión de Appell asociada es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

y se genera a partir de la recurrencia $P_n(x) = \int_0^x P_{n-1}(t)dt + P_n(0)$. Note que $P_n(x)$ es precisamente la aproximación de orden n del polinomio de Taylor de e^x.

Ejemplo 2.6 (Polinomios de Bernoulli)**.** Considerando la aplicación lineal

$$\mu(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

tenemos $\mu(x^n) = \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Así $M_\mu(z) = \int_a^b e^{xz}dx = (e^{bz} - e^{az})/z$. Por tanto, la serie generadora toma la forma

$$\frac{z}{e^{bz} - e^{az}} e^{xz} = \frac{z}{e^{(b-a)z} - 1} e^{(x-a)z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) z^n,$$

que podemos expresar en términos de los polinomios de Bernoulli. Tomando $a = 0$ y $b = 1$ recuperamos de esta manera los polinomios de Bernoulli a través del funcional

$$\mu(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Además, escogiendo $a = -1$ y $b = 0$, el funcional $\mu(f) = \int_{-1}^0 f(x)dx$ produce los polinomios $b_n(x) = B_n(x+1)$ estudiados antes en relación con las sumas de potencias.

El Corolario 2.1 aplicado al funcional $\mu(f) = \int_0^1 f(x)dx$ recupera la recurrencia integral

$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt - n\int_0^1\int_0^x B_{n-1}(t)dtdx,$$

ya obtenida en la Proposición 1.5. En este caso, el Teorema 2.1 (2) toma la forma $\int_0^1 B_n(t+x_0)dt = x_0^n$. Como $B'_{n+1} = (n+1)B_n$, por el teorema fundamental del cálculo recuperamos la identidad

$$B_{n+1}(x_0+1) - B_{n+1}(x_0) = (n+1)x_0^n.$$

En conclusión, los polinomios de Bernoulli conforman la única sucesión de Appell que satisface esta ecuación en diferencias.

Ejemplo 2.7 (Polinomios de Euler)**.** Es el turno de la aplicación

$$\mu(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2},$$

con momentos $\mu(x^n) = 1/2$ para todo $n \geq 1$, y $M_\mu(z) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{1}{2}(e^z - 1) = (e^z + 1)/2$. Vemos entonces que

$$P(x, z) = \frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} z^n,$$

recuperando así la serie generadora de los polinomios de Euler. Este funcional induce la recurrencia integral

$$E_n(x) = n \int_0^x E_{n-1}(t)dt - \frac{n}{2} \int_0^1 E_{n-1}(t)dt,$$

dada por Corolario 2.1. Ademas, el Teorema 2.1 (2) implica que

$$\frac{E_n(x_0 + 1) + E_n(x_0)}{2} = x_0^n,$$

propiedad ya obtenida en la Proposición 1.9 (1) que caracteriza a los polinomios de Euler.

Más generalmente, si consideramos números reales fijos $a < b$ y la aplicación lineal

$$\mu(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

entonces $M_\mu(z) = (e^{az} + e^{bz})/2$. Así, la serie generadora de la sucesión de Appell inducida es

$$\frac{2}{e^{az} + e^{bz}} e^{xz} = \frac{2}{e^{(b-a)z} + 1} e^{(x-a)z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} E_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) z^n,$$

polinomios que expresamos en términos de los polinomios de Euler.

Ejemplo 2.8. (Polinomios de Bernoulli de orden superior) Estos polinomios están definidos a través de la serie generadora

$$\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^k \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(k)}(x)}{n!} z^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

aunque la misma definición se puede emplear en el caso $k \in \mathbb{C}$. Estos polinomios generalizan a los polinomios de Bernoulli, $B_n^{(1)}(x) = B_n(x)$, y también $B_n^{(0)}(x) = x^n/n!$. En este caso el funcional μ que produce a $C(z) = 1/M_\mu(z)$ está dado por la integral múltiple

$$\mu(f) = \int_{[0,1]^k} f(t_1 + \cdots + t_k) dt_k \cdots dt_1.$$

En efecto,

$$\mu(e^{xz}) = \int_{[0,1]^k} e^{(t_1 + \cdots + t_k)z} dt_k \cdots dt_1 = \left(\int_0^1 e^{t_1 z} dt_1\right) \cdots \left(\int_0^1 e^{t_k z} dt_k\right) = \frac{(e^z - 1)^k}{z^k}.$$

En este caso el Corolario 2.1 indica que

$$B_n^{(k)}(x) = \int_0^x B_{n-1}^{(k)}(t)dt - \int_{[0,1]^k} \left(\int_0^{t_1 + \cdots + t_k} B_{n-1}^{(k)}(s)ds\right) dt_k \cdots dt_1.$$

Estos polinomios se pueden generalizar aún más empleando la serie generadora

$$\frac{\omega_1 \cdots \omega_k z^k}{(e^{\omega_1 z}-1)\cdots(e^{\omega_k z}-1)} \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x;\omega_1,\dots,\omega_k)\frac{z^n}{n!}, \quad \omega_1,\dots\omega_k \in \mathbb{C},$$

como aparece en los trabajos de Nörlund [31, Kapitel 6]. En este caso el funcional asociado es

$$\mu(f) = \int_{[0,1]^k} f(\omega_1 t_1 + \cdots + \omega_k t_k)dt_k \cdots dt_1,$$

como el lector puede comprobar fácilmente. Finalmente, note que si $\omega_1 = \cdots = \omega_k = 1$, recuperamos el caso anterior.

Ejemplo 2.9. (Polinomios de Euler de orden superior) Análogamente al ejemplo anterior, estos polinomios se definen a través de

$$\left(\frac{2}{1+e^z}\right)^k \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n^{(k)}(x)}{n!} z^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Para $k=1$ recuperamos los polinomios de Euler, $E_n^{(1)}(x) = E_n(x)$. El funcional μ para producir esta sucesión de Appell es

$$\mu(f) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} f(j),$$

generalizando claramente el caso $k=1$. Efectivamente, observamos que

$$\mu(e^{xz}) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} e^{jz} = \left(\frac{1+e^z}{2}\right)^k.$$

Un paso más adelante encontramos otra generalización a través de

$$\frac{2^k}{(e^{\omega_1 z}+1)\cdots(e^{\omega_k z}+1)} \cdot e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)}(x;\omega_1,\dots,\omega_k)\frac{z^n}{n!}, \quad \omega_1,\dots\omega_k \in \mathbb{C},$$

también estudiado en [31, Kapitel 6]. En este caso el funcional asociado es

$$\mu(f) = \frac{1}{2^k}\sum_{n_j \in \{0,1\}} f(n_1\omega_1 + \cdots + n_k\omega_k),$$

donde la anterior suma contiene 2^k términos correspondientes a las k-tuplas $(n_1,\dots,n_k)$ cuyas componentes son 0 ó 1.

Ejemplo 2.10 (Polinomios de Apostol-Euler)**.** Esta sucesión de Appell se genera a partir de la igualdad

$$\frac{e^{zx}}{1+\beta(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\beta;x)\frac{z^n}{n!}, \quad 0 \le \beta \le 1.$$

Al requerir que $M_\mu(z) = \mu(e^{xz}) = 1 + \beta(e^z-1)$, basta con definir

$$\mu(f) = f(0) + \beta(f(1)-f(0)) = (1-\beta)f(0) + \beta f(1).$$

De esta manera estos polinomios incluyen a los polinomios de Euler tomando $\beta = 1/2$. Concluimos gracias al Teorema 2.1 que esta familia está caracterizada por ser la única que satisface

$$(1-\beta)E_n(\beta;x) + \beta E_n(\beta;x+1) = x^n, \qquad n \ge 0.$$

Ejemplo 2.11. Los polinomios $W_m(x)$ dados por la función generadora

$$\sum_{m=0}^{\infty} W_m(x)\frac{z^m}{m!} = \frac{4e^{zx}}{2(e^z+1)-z(e^z-1)},$$

fueron introducidos en [23] por su interés en relación con los ceros de las funciones de Bessel. En nuestro contexto podemos obtenerlos como la sucesión de Appell asociada al funcional

$$\mu(f) = \frac{1}{4}\left(2f(1) - f'(1) + f'(0) + 2f(0)\right).$$

En efecto, es inmediato comprobar que

$$M_\mu(z) = \frac{1}{4}\left(2e^z - ze^z + z + 2\right) = \frac{1}{4}\left(2(e^z+1) - z(e^z-1)\right).$$

En particular, estos polinomio se obtienen a través de la recurrencia integral

$$W_m(x) = m\int_0^x W_{m-1}(x)dx - \frac{m}{4}\left(2\int_0^1 W_{m-1}(x)dx - W_{m-1}(1) + W_{m-1}(0)\right),$$

Además, el Teorema 2.1 demuestra que

$$2W_m(x_0+1) + 2W_m(x_0) - mW_{m-1}(x_0+1) + mW_{m-1}(x_0) = 4x_0^m,$$

fórmula que también se enuncia en [23].

Ejemplo 2.12. Fije constantes $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_m$ tales que

$$a_l + a_{l+1} + \cdots + a_m = 0, \quad \text{y} \quad la_l + (l+1)a_l + \cdots + ma_m = 1,$$

donde $l < m$ son enteros también prefijados. Entonces el funcional

$$\mu(f) = \sum_{j=l}^{m} a_j \int_0^j f(t)dt,$$

satisface $\mu(1) = 1$ y

$$M_\mu(z) = \sum_{j=l}^{k} a_j \int_0^j e^{tz}dt = \sum_{j=l}^{m} \frac{a_j}{z}(e^{jz}-1) = \sum_{j=l}^{m} \frac{a_j e^{jz}}{z} = \frac{a_l e^{lz} + a_{l+1}e^{(l+1)z} + \cdots + a_m e^{mz}}{z}.$$

Los polinomios generados por este funcional se denominan *polinomios de tipo Bernoulli de primer orden*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,1}^p(x)\frac{z^n}{n!} = J_p(z)e^{xz}, \quad J_p(z) := \frac{z}{\sum_{j=l}^m a_j e^{jz}}, \quad p = m-l.$$

En este caso el Teorema 2.1 afirma que

$$x_0^n = \mu\left(B_{n,1}^p(x+x_0)\right) = \sum_{j=l}^{m} \frac{a_j}{n+1}\int_0^j (B_{n+1,1}^p)'(x_0+t)dt = \sum_{j=l}^{m} \frac{a_j}{n+1}(B_{n+1,1}^p(x_0+j) - B_{n+1,1}^p(x_0)).$$

Recordando que $a_l + a_{l+1} + \cdots + a_m = 0$, esta última igualdad es equivalente a

$$\sum_{j=l}^{m} a_j B_{n+1,1}^p(x_0+j) = (n+1)x_0^n.$$

Sea $T = T_1$, donde $T_1(f)(x) = f(x+1)$ es el operador traslación y T^j is es la composición de T consigo mismo j veces, es decir, $T^j(f)(x) = f(x+j)$. Entonces, en términos del operador de diferencias $\Delta_p = \sum_{j=l}^{m} a_j T^j$ vemos que el Teorema 2.1 en realidad implica que

$$\Delta_p(B^p_{n+1,1})(x) = (n+1)x^n.$$

Por tanto recuperamos la ecuación en diferencias obtenida en [45] donde se introducen y estudian estos polinomios de tipo Bernoulli.

2.3. Ejemplos clásicos II

Antes de continuar con más ejemplos necesitamos recordar algunas propiedades básicas de la función Gamma [32], de gran utilidad en ecuaciones diferenciales y probabilidad, entre otros.

La función Gamma se define para valores reales $x > 0$ por la integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Una de sus propiedades principales consiste en la ecuación funcional

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

que se verifica a partir de la definición tras una integración por partes. Como $\Gamma(1) = 1$, se sigue por inducción que esta función interpola al factorial. Más precisamente,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para todo entero } n \geq 0.$$

Un valor especial de esta función viene dado por

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

que junto a la ecuación funcional produce los valores

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}, \quad \text{para todo entero } n \geq 0, \tag{2.8}$$

fórmula que se sigue por inducción sobre n.

Otra de sus propiedades que necesitamos es la fórmula de Stirling

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}(x/e)^x} = 1.$$

Finalmente, recordamos otra función íntimamente relacionada: la función beta que se define por la integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0.$$

Uno de los resultados clásicos sobre estas funciones indica que

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Con estos preliminares podemos introducir más familias de polinomios de Appell.

Ejemplo 2.13 (Polinomios de Laguerre)**.** Un funcional clásico en probabilidad y en transformadas de Laplace está dado por

$$\mu(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s > 0 \text{ fijo},$$

para funciones donde esta integral sea convergente, en particular, para polinomios. Sus momentos son finitos y vienen dados por

$$\mu(x^n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}dt = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}du = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

De esta forma

$$M_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{s^{n+1}} = \frac{1}{s-z},$$

convergente para $|z| < s$. Al imponer la condición $\mu(1) = 1$ requerimos entonces que $s = 1$ en cuyo caso obtenemos los polinomios

$$(1-z)e^{xz} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)z^n.$$

El anterior funcional admite la siguiente generalización: dado $\alpha > -1$ podemos considerar

$$\mu(f) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{+\infty} f(t)t^\alpha e^{-t}dt. \tag{2.9}$$

En este caso los momentos son $\mu(0) = 1$ y

$$\mu(x^n) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha+n}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} = (\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n),$$

donde hemos empleado repetidas veces la ecuación funcional de Gamma. En términos del coeficiente binomial $\binom{\beta}{m} = \beta(\beta+1)\cdots(\beta-m+1)/m!$, válido para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$, podemos reescribir

$$\mu(x^n) = (-1)^n n!\binom{-\alpha-1}{n},$$

para concluir que $M_\mu(z) = (1-z)^{-\alpha-1}$.

Por otra parte, los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ se definen a través de la serie generadora

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)z^n = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}e^{-zx/(1-z)},$$

pero no son precisamente una sucesión de Appell. Expandiendo esta serie de potencias

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}e^{-zx/(1-z)} &= (1-z)^{-\alpha-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{xz}{1-z}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}(1-z)^{-m-\alpha-1}\frac{(-1)^m x^m z^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+m+\alpha}{k}z^k\frac{(-1)^m x^m z^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n-m}z^n\frac{(-1)^m x^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{(-1)^m x^m}{m!}\right)z^n,
\end{aligned}$$

concluimos que

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{(-1)^m x^m}{m!}.$$

En particular,

$$L_n^{(\alpha-n)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\alpha}{n-m} \frac{(-1)^m x^m}{m!}.$$

A partir de esta fórmula comprobamos que estos polinomios tienen como serie generadora exponencial a

$$(1+z)^{\alpha+1} e^{-xz}.$$

En conclusión, la sucesión de Appell inducida por el funcional (2.9) es precisamente

$$\{(-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)\}_{n\geq 0}.$$

Ejemplo 2.14 (Polinomios de Hermite)**.** Una aplicación lineal μ clásica viene dado por la fórmula

$$\mu(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2/2} dx.$$

Para comprobar que está bien definido note que si f es un polinomio impar, $\mu(f) = 0$ mientras que si es par $\mu(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x^2/2} dx$. Para este caso

$$\mu(x^{2n}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{2^n}{\sqrt{2}} du = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \qquad n \geq 0,$$

luego de la substitución $u = x^2/2$. Por tanto,

$$M_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!} = e^{z^2/2},$$

y la serie generadora de estos polinomios es

$$P(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{He_n(x)}{n!} z^n = \exp\left(-\frac{z^2}{2} + xz\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2}\right).$$

Esta es precisamente la función generadora de los polinomios clásicos de Hermite

$$He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2}\right).$$

Note que la última ecuación se sigue de la fórmula de Taylor aplicada en $z = 0$.

Otra propiedad interesante de estos polinomios es que satisfacen la recurrencia diferencial

$$He_{n+1}(x) = x He_n(x) - He_n'(x). \tag{2.10}$$

En términos de su serie generadora exponencial, esta igualdad es equivalente a afirmar que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xz} e^{-z^2/2}\right) = x e^{xz} e^{-z^2/2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xz} e^{-z^2/2}\right),$$

que se verifica inmediatamente.

En este ejemplo el Corolario 2.1 toma la forma

$$\frac{He_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \int_0^x \frac{He_n(t)}{n!}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{He_n(s)}{n!} ds \right) e^{-t^2/2} dt.$$

Esta recurrencia se puede escribir de manera equivalente calculado $He_{n+1}(0)$ a través de la ecuación (2.10) que implica que $He_{n+1}(0) = -He_n(0)$. Por tanto,

$$He_{n+1}(x) = (n+1) \int_0^x He_n(t)dt - He_n'(0). \tag{2.11}$$

En particular, vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t He_n(s)ds \right) e^{-t^2/2} dt = \frac{He_n'(0)}{n+1}.$$

La sucesión $\{He_n(x)\}_{n\geq 0}$ de polinomios de Hermite dada anteriormente se aplica en Probabilidad. Sin embargo, para aplicaciones en Física es habitual trabajar con la sucesión

$$H_n(x) := 2^{n/2} He_n(\sqrt{2}x),$$

con serie generadora exponencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2xz} e^{-z^2}.$$

En este caso, la recurrencia integral (2.11) implica que

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) = 2^{\frac{n+1}{2}} He_{n+1}(x) &= 2^{\frac{n+1}{2}} \left((n+1) \int_0^{\sqrt{2}x} He_n(t)dt - He_n'(0) \right) \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} \left((n+1) \int_0^x He_n(\sqrt{2}u)\sqrt{2}du - He_n'(0) \right) \\ &= 2(n+1) \int_0^x H_n(u)du - H_n'(0), \end{aligned}$$

dado que $H_n'(x) = 2^{\frac{n+1}{2}} He_n'(\sqrt{2}x)$ y por tanto $H_n'(0) = 2^{\frac{n+1}{2}} He_n'(0)$.

A través de estas recurrencias obtenemos los primeros valores de estas sucesiones:

$$\begin{aligned} &He_1(x) = x, && He_2(x) = x^2 - 1, && He_3(x) = x^3 - 3x, \\ &He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, && He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, && He_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15. \end{aligned}$$

Para la segunda sucesión obtenemos también

$$\begin{aligned} &H_1(x) = 2x, && H_2(x) = 4x^2 - 2, && H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ &H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, && H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, && H_6(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15 (Polinomios hipergeométricos de Bernoulli–Kummer)**.** La función hipergeométrica confluente de Kummer $M(a, b; z)$ se define por la serie

$$M(a, b; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad b \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

donde $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ denota el símbolo de Pochhammer. Empleando la serie de Taylor de la función exponencial y la función beta

$$B(a, b-a) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)},$$

es posible verificar que

$$M(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt.$$

Estos razonamiento nos llevan a considerar el funcional

$$\mu(f) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 f(t) t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt,$$

para el cual tendremos que $M_\mu(z) = \mu(e^{xz}) = M(a, b; z)$, y $\mu(x^n) = \frac{(a)_n}{(b)_n}$. Los polinomios generados por la ecuación

$$\frac{e^{xz}}{M(a, b; z)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{a,b,n}(x) \frac{z^n}{n!},$$

se denominan *polinomios hipergeométricos de Bernoulli–Kummer*. El Teorema 2.1 (1) demuestra que esta es la única sucesión de Appell que satisface

$$\int_0^1 B_{a,b,n}(t) t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt = 0, \quad n > 0.$$

Además este teorema afirma que esta también es la única sucesión de Appell que verifica

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 B_{a,b,n}(t+x_0) t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt = x_0^n.$$

Vale la pena resaltar que estas dos últimas caracterizaciones han sido obtenidas recientemente en [19] básicamente aplicando este mismo método.

Cuando $a = 1$ y $b = N+1$ con N un entero no negativo, el anterior funcional se reduce a

$$\mu(f) = N \int_0^1 f(t)(1-t)^{N-1}dt,$$

y su serie generadora es

$$M_\mu(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(N+1)(N+2)\cdots(N+n)} = N! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(N+n)!} = \frac{e^z - \left(1 + z + \cdots + \frac{z^{N-1}}{(N-1)!}\right)}{z^N/N!}.$$

En este caso la relación

$$M_\mu(z) = N \int_0^1 e^{tz}(1-t)^{N-1}dt = \frac{e^z - \left(1 + z + \cdots + \frac{z^{N-1}}{(N-1)!}\right)}{z^N/N!},$$

se puede comprobar directamente por inducción sobre N, con ayuda de una integración por partes. Los polinomios $B_{1,N+1.n}(x) = B_{N,n}(x)$ se denominan *polinomios hipergeométricos de Bernoulli* [22] y admiten una caracterización similar a la mencionada en el párrafo anterior.

Terminamos con dos ejemplos más, uno sobre polinomios útiles en integración numérica y otro sobre polinomios relacionados con los números armónicos.

Ejemplo 2.16. En distintos métodos de integración numérica, como la regla del trapecio compuesto, aparecen sucesiones de Appell para analizar el error de la aproximación. Este ejemplo es tomado de [41, p. 212] donde para llevar acabo este análisis se considera una sucesión de polinomios $\{q_n\}_{n\geq 1}$ definidos por las siguientes condiciones:

(i) q_n es un polinomio de grado n,

(ii) $q'_{n+1}(x) = q_n(x)$,

(iii) q_n es una función par si n es un número par, y q_n es una función impar si n lo es,

(iv) Si $n > 1$ es impar, entonces $q_n(-1) = 0$ y $q_n(1) = 0$,

(v) $q_1(x) = -x$.

Nuestras herramientas permiten hallar estos polinomios en términos de los polinomios de Bernoulli. En efecto, veremos que

$$q_n(x) = -2^n B_n\left(\frac{x+1}{2}\right). \tag{2.12}$$

Para esta tarea emplearemos el funcional

$$\mu(f) = \int_0^1 \frac{f(t)+f(-t)}{2}dt,$$

que básicamente integra sobre el intervalo $[0,1]$ la parte par de la función f. Entonces

$$M_\mu(z) = \int_0^1 \frac{e^{xz}+e^{-xz}}{2}dt = \left.\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2z}\right|_0^1 = \frac{e^z-e^{-z}}{2z},$$

y la serie generadora de los polinomios correspondientes es

$$P(x,z) = \frac{2z}{e^z-e^{-z}}e^{xz} = \frac{2z}{e^{2z}-1}e^{(x+1)z} = \sum_{n=0}^\infty B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{2^n z^n}{n!}.$$

Veamos que $q_n(x) = -P_n(x) = -2^n B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$ satisface las cinco propiedades requeridas. Los numerales (i) y (ii) son claramente válidos al provenir de una recurrencia de Appell. Para establecer la paridad de estas funciones, note que

$$\frac{2z}{e^z-e^{-z}}(e^{xz}+e^{-xz}) = P(x,z)+P(-x,z) = -\sum_{n=0}^\infty (q_n(x)+q_n(-x))z^n,$$

es una función par de z. Así, los coeficientes impares se anulan, es decir, $q_{2r+1}(x)+q_{2r+1}(-x) = 0$, para todo $r \geq 0$. Análogamente,

$$\frac{2z}{e^z-e^{-z}}(e^{xz}-e^{-xz}) = P(x,z)-P(-x,z) = -\sum_{n=0}^\infty (q_n(x)-q_n(-x))z^n,$$

es una función impar de z y sus coeficientes pares deben ser cero. Por tanto, $q_{2r}(x) = q_{2r}(-x)$, es decir, estas funciones son pares. Finalmente, (iv) es válido porque

$$q_{2r+1}(1) = -2^{2r+1}B_{2r+1}(1) = -2^{2r+1}B_{2r+1} = 0, \qquad r \geq 1,$$

teniendo que cuenta que los números de Bernoulli de índice impar mayor a uno se anulan.

Como las cinco propiedades anteriores determinan unívocamente la familia de polinomios, la ecuación (2.12) debe ser válida. Esto además implica que

$$\frac{q_{2r}(1)}{2^{2r}} = -\frac{B_{2r}}{(2r)!},$$

tal y como se afirma en [41, Remark 7.1]. Finalmente, aplicando el Teorema 2.1 a este funcional obtenemos las recurrencias

$$\begin{aligned} q_{2n}(x) &= 2n\int_0^x q_{2n-1}(t)dt - 2n\int_0^1\int_0^x q_{2n-1}(t)dtdx, \\ q_{2n+1}(x) &= (2n+1)\int_0^x q_{2n}(t)dt, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la paridad de cada q_r.

Finalizamos esta segunda sección de ejemplos con una familia de polinomios novedosa a través de un funcional que genera los números armónicos.

Ejemplo 2.17. Los números armónicos se definen como

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Podemos ver a estos números como los momentos de un operador integral escribiendo

$$H_n = \int_0^1 1 + t + \cdots + t^{n-1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt.$$

Sería entonces natural considerar el funcional $f \to \int_0^1 \frac{f(1)-f(t)}{1-t}dt$, pero este se anula en cualquier constante. Para evitar esta dificultad, aplicamos su shift dado por

$$\mu(f) = \int_0^1 \frac{\int_0^1 f(s)ds - \int_0^t f(s)ds}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{\int_t^1 f(s)ds}{1-t}dt.$$

De esta manera $\mu(1) = 1$ y $\mu(x^n) = H_n/(n+1)$. Además su serie generadora será

$$M_\mu(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n+1}\frac{z^n}{n!}.$$

Denotemos por $\mathcal{H}_n(x)$ los polinomios generados por la relación

$$\frac{e^{xz}}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n+1}\frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Según el Teorema 2.1 esta familia de polinomios de Appell están caracterizados por

$$x_0^n = \int_0^1 \frac{\int_t^1 \mathcal{H}_n(x_0+s)ds}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_{n+1}(x_0+1) - \mathcal{H}_{n+1}(x_0+t)}{1-t}dt.$$

En la siguiente tabla recopilamos los ejemplos, incluyendo además los polinomios de Strodt asociados a distribuciones discretas de probabilidad, como se explica en [12].

Cuadro 2.1: Algunas familias de polinomios de Appell

Polinomios	Funcional $\mu(p)$	Serie $\mu(e^{xt})$ / Caracterización
Monomios $(x-a)^n$	$p(a)$	e^{at}
Bernoulli $B_n(x)$	$\int_0^1 p(t)dt$	$(e^t-1)/t$
		$B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)=(n+1)x^n$
$(b-a)^n B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$	$\int_a^b p(t)dt$	$(e^{bt}-e^{at})/t$
$-2^n B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$	$\int_0^1 \frac{p(t)+p(-t)}{2}dt$	$(e^t-e^{-t})/2t$
kth Bernoulli $B_n^{(k)}(x)$	$\int_{[0,1]^k} p(s_1+\cdots+s_k)d\boldsymbol{s}$	$(e^t-1)^k/t^k$
		$\int_{[0,1]^k} B_n^{(k)}(x+s_1+\cdots+s_k)d\boldsymbol{s}=x^n$
Bernoulli Nörlund	$\int_{[0,1]^k} p(\omega_1 s_1+\cdots+\omega_k s_k)d\boldsymbol{s}$	$\prod_{j=1}^k \frac{e^{\omega_j t}-1}{\omega_j t}$
$B_n^{(k)}(x\mid\omega)$	$\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_k)\in\mathbb{C}^k$	$\int_{[0,1]^k} B_n^{(k)}(x+\sum_{j=1}^k \omega_j s_j\mid\omega)d\boldsymbol{s}=x^n$
Apostol Euler $E_n(\beta;x)$	$(1-\beta)p(0)+\beta p(1)$	$1+\beta(e^t-1)$
		$(1-\beta)E_n(\beta;x)+\beta E_n(\beta;x+1)=x^n$
Euler $E_n(x)$	$\frac{p(0)+p(1)}{2}$	$(1+e^t)/2$
		$E_n(x)+E_n(x+1)=2x^n$
$(b-a)^n E_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$	$(p(b)+p(a))/2$	$(e^{bt}+e^{at})/2$
kth Apostol Euler $E_n^{(k)}(\beta;x)$	$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\beta^j(1-\beta)^{k-j}p(j)$	$\big(1+\beta(e^t-1)\big)^k$
		$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\beta^j(1-\beta)^{k-j}E_n^{(k)}(\beta;x+j)=x^n$
Euler Nörlund	$2^{-k}\sum_{n_j\in\{0,1\}} p\Big(\sum_{j=1}^k n_j\omega_j\Big)$	$2^{-k}\prod_{j=1}^k(e^{\omega_j t}+1)$
$E_n^{(k)}(x\mid\omega)$	$\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_k)\in\mathbb{C}^k$	$\sum_{n_j\in\{0,1\}} E_n^{(k)}\Big(x+\sum_{j=1}^k n_j\omega_j\mid\omega\Big)=2^k x^n$
Howard $W_n(x)$	$(2f(1)-f'(1)+f'(0)+2f(0))/4$	$(2(e^t+1)-t(e^t-1))/4$
		$2W_n(x+1)+2W_n(x)$ $-nW_{n-1}(x+1)+nW_{n-1}(x)=4x^n$
Tipo Bernoulli	$\sum_{j=l}^m a_j\int_0^j p(s)ds$	$\sum_{j=l}^m a_j e^{jt}/t$
$B_{n,1}^{(m-l)}(x)$	$l,m\in\mathbb{Z}$, $\sum_{j=l}^m a_j=0$, $\sum_{j=l}^m ja_j=1$	$\sum_{j=l}^m a_j B_{n,1}^{(m-l)}(x+j)=nx^{n-1}$
w-Strodt $S_{n,w}(x)$	$\sum_{j=1}^N w_j p(x_j)$	$\sum_{j=1}^N w_j e^{x_j t}$
	$x_j\in\mathbb{R}$, $0<w_j<1$, $\sum_{j=1}^N w_j=1$	$\sum_{j=0}^{n-1} S_{n,w}(x+w_j)=x^n$

Laguerre	$\displaystyle\int_0^{+\infty} p(s)\frac{s^{\alpha}e^{-s}}{\Gamma(1+\alpha)}ds,\ \mathrm{Re}(\alpha) > -1$	$(1-t)^{-\alpha-1}$
$(-1)^n n! L_n^{(\alpha-n)}(x)$		$\int_0^{+\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x+t)\frac{t^{\alpha}e^{-t}}{\Gamma(1+\alpha)}dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
Hermite	$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} p(s)e^{-s^2/2}ds$	$\exp(t^2/2)$
$He_n(x)$		$\int_{-\infty}^{+\infty} He_n(x+s)e^{-s^2/2}ds = \sqrt{2\pi}x^n$
Bernoulli hipergeométrico	$\displaystyle N\int_0^1 p(s)(1-s)^{N-1}ds,\ N \geq 1$	$(e^t - \sum_{j=0}^{N-1} t^j/j!)/(t^N/N!)$
$B_{N,n}(x)$		$N\int_0^1 B_{N,n}(x+s)(1-s)^{N-1}ds = x^n$
Kummer hipergeométric	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 p(s)s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n-1)}\frac{t^n}{n!}$
$B_{a,b,n}(x)$	$\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0$	$\int_0^1 B_{a,b,n}(x+s)\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\frac{(1-s)^{b-1}}{\Gamma(b)}ds = \frac{x^n}{\Gamma(a+b)}$
Tipo armónico	$\displaystyle\int_0^1 \frac{\int_t^1 p(s)ds}{1-t}dt$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n+1}\frac{t^n}{n!}$
$\mathcal{H}_n(x)$		$x^n = \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_{n+1}(x+1)-\mathcal{H}_{n+1}(x+t)}{1-t}dt$

2.4. La fórmula general de Taylor

En esta sección recordamos brevemente como cada sucesión de Appell induce una fórmula general para aproximar una función suave a través de sus derivadas sucesivas. Este método generaliza la fórmula de Taylor y se puede consultar en [13, 14].

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de Appell asociada a un funcional $\mu : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ y consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado un valor fijo $x_0 \in \mathbb{R}$, por el teorema fundamental del cálculo es inmediato comprobar que

$$f(x_0) = f(x) + \int_x^{x_0} P_1'(x_0 + x - t)f'(t)dt,$$

dado que $P_1' = P_0 = 1$. A partir de esta ecuación podemos emplear integración por partes para obtener

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)P_1(x_0) - f'(x_0)P_1(x) + \int_x^{x_0} P_1(x_0 + x - t)f''(t)dt,$$

suponiendo que f de clase $\mathcal{C}^2$. Repitiendo este procedimiento iteradamente vemos que si f es de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en su dominio, entonces

$$f(x_0) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} f^{(j)}(x)P_j(x_0) - f^{(j)}(x_0)P_j(x) + \int_x^{x_0} P_k(x_0 + x - t)f^{(k+1)}(t)dt.$$

En efecto, esta fórmula se puede comprobar por inducción sobre k.

Por otra parte, recordando que $\mu(P_j) = 0$, para todo $j \geq 1$, si aplicamos μ a la ecuación anterior obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de Appell asociada a un funcional $\mu : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ definida en un intervalo I, entonces, fijado $x_0 \in I$ se verifica que*

$$f(x_0) = \mu(f) + \sum_{j=1}^{k} \mu(f^{(j)})P_j(x_0) + \mu\left(\int_x^{x_0} P_k(x_0 + x - t)f^{(k+1)}(t)dt\right).$$

Si aplicamos esta fórmula para algunas de las sucesiones de Appell estudiadas hasta el momento obtenemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.18 (Fórmula de Taylor)**.** Tomando $P_n(x) = (x-a)^n/n!$ y $\mu(f) = f(a)$, obtenemos la fórmula clásica de Taylor

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!} + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt,$$

centrada en el punto a.

Ejemplo 2.19. Al escoger $P_n(x) = B_n(x)/n!$ como los polinomios de Bernoulli asociados al funcional $\mu(f) = \int_0^1 f(t)dt$, obtenemos la fórmula

$$f(x) = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{j=1}^{k}(f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0))\frac{B_j(x)}{j!} + \int_0^1 \int_s^x \frac{B_k(x+s-t)}{k!} f^{(k+1)}(t)dtds.$$

Ejemplo 2.20. Finalmente, eligiendo $P_n(x) = E_n(x)/n!$ como los polinomios de Euler asociados a $\mu(f) = (f(0) + f(1))/2$ llegamos a la fórmula

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0) + f^{(j)}(1)}{2}\frac{E_j(x)}{j!} + \frac{1}{2k!}\left(\int_0^x E_k(x-t) f^{(k+1)}(t)dt - \int_x^1 E_k(x+1-t) f^{(k+1)}(t)dt\right).$$

2.5. Las fórmula de Euler-MacLaurin y de Euler-Boole

Finalizamos este capítulo con una aplicación de cómo es posible deducir fórmulas de sumación a través de la generalización de la fórmula de Taylor vista en la sección anterior. Desarrollaremos solo los casos clásicos, a saber, las fórmulas de Euler-MacLaurin y de Euler-Boole que corresponden a los polinomios de Bernoulli y Euler, respectivamente, ver [12, 32, 47]. Ellas encierran otra demostración de las fórmulas de $S_m(n)$ y $A_m(n)$ estudiadas en el primer capítulo. Además incluimos algunos ejemplos clásicos de cómo estas fórmulas permiten estimar el crecimiento asintótico de sumas finitas.

Teorema 2.2 (Fórmula de Euler-MacLaurin)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función $2m+1$ veces diferenciable. Entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} f(j) = \int_0^n f(t)dt + \frac{f(0)+f(n)}{2} &+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)) \\ &+ \int_0^n \frac{B_{2m+1}(t-[t])}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt.\end{aligned}$$

Además,

$$\sum_{j=0}^{n} f(j) = \int_0^n f(t)dt + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)) + R_f(n,m),$$

donde $R_f(n,m) = \int_0^n \frac{B_{2m} - B_{2m}(t-[t])}{(2m)!} f^{(2m)}(t)dt.$

Demostración. Aplicando la fórmula obtenida en el Ejemplo 2.19 para f y $x = 0$ obtenemos

$$f(0) = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{j=1}^{2m} (f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0)) \frac{B_j}{j!} - \int_0^1 \int_0^s \frac{B_{2m}(s-t)}{(2m)!} f^{(2m+1)}(t) dt ds.$$

Intercambiando el orden de integración en el último sumando de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_t^1 \frac{B_{2m}(s-t)}{(2m)!} ds\, f^{(2m+1)}(t)dt &= \int_0^1 \frac{B_{2m+1}(1-t) - B_{2m+1}}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt \\ &= -\int_0^1 \frac{B_{2m+1}(t)}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt, \end{aligned}$$

gracias a la Proposición 1.4. Por tanto,

$$f(0) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{f(0) - f(1)}{2} + \sum_{j=1}^{m} (f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)) \frac{B_{2j}}{(2j)!} + \int_0^1 \frac{B_{2m+1}(t)}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt.$$

Ahora, cambiando $f(x)$ por $f(x+k)$ en esta última fórmula obtenemos

$$\begin{aligned} f(k) = &\int_k^{k+1} f(t)dt - \frac{f(k) - f(k+1)}{2} + \sum_{j=1}^{m} (f^{(2j-1)}(k+1) - f^{(2j-1)}(k)) \frac{B_{2j}}{(2j)!} \\ &+ \int_k^{k+1} \frac{B_{2m+1}(t-[t])}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Finalmente, sumando estás fórmulas desde $j = 0$ hasta $n-1$ y sumando $f(n)$ en este resultado obtenemos la primera fórmula enunciada en el teorema. Para la segunda afirmación notamos que

$$R_f(n, m) = \frac{B_{2m}}{(2m)!} (f^{(2m-1)}(n) - f^{(2m-1)}(0)) - \int_0^n \frac{B_{2m}(t-[t])}{(2m)!} f^{(2m)}(t)dt.$$

Entonces la segunda igualdad se sigue al integrar por partes la expresión $-\int_0^n \frac{B_{2m}(t-[t])}{(2m)!} f^{(2m)}(t)dt = \int_0^n \frac{B_{2m+1}(t-[t])}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt$ dado que $B_{2m+1}(t-[t]) = 0$ cuando t es entero. □

Nota 2.3. Es posible demostrar que

$$|R_f(n, m)| \leq (2 - 2^{1-2m}) \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_0^n |f^{(2m)}(t)| dt.$$

Esto se sigue de propiedades cualitativas de los polinomios de Bernoulli. En particular, del hecho que $|B_{2m}(x) - B_{2m}|$ tiene un máximo en $x = 1/2$. Usando la identidad (1.18) vemos que

$$|B_{2m}(x) - B_{2m}| \leq |B_{2m}(1/2) - B_{2m}| = (2 - 2^{1-2m})|B_{2m}|,$$

de donde se deduce la desigualdad requerida.

Nota 2.4. Otra forma alternativa para la fórmula de Euler-MacLaurin que se sigue de la misma demostración es

$$\sum_{j=0}^{n} f(j) = \int_0^n f(t)dt + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \sum_{j=2}^{k} \frac{B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \int_0^n \frac{B_{k+1}(t-[t])}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t)dt,$$

donde incluimos a todos los números de Bernoulli aunque sean nulos.

Teorema 2.5 (Fórmula de Euler-Boole)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función $k+1$ veces diferenciable. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}f(j) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(1)\frac{E_j(0)}{j!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(n+1)\frac{E_j(0)}{j!} + \frac{(-1)^k}{2\cdot k!}\int_1^{n+1}(-1)^{[t]}E_k(t-[t])f^{(k+1)}(t)dt,$$

donde $E_j(0)$ es el valor en 0 del j-ésimo polinomio de Euler $E_j(x)$.

Demostración. Empleando la fórmula obtenida en el Ejemplo 2.20 para f en $x=0$ obtenemos

$$f(0) = \sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(0)+f^{(j)}(1)}{2}\frac{E_j(0)}{j!} - \frac{(-1)^k}{2k!}\int_0^1 E_k(t)f^{(k+1)}(t)dt.$$

Luego, cambiando $f(x)$ por $f(x+l)$ llegamos a la ecuación

$$f(l) = \sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(l)+f^{(j)}(l+1)}{2}\frac{E_j(0)}{j!} - \frac{(-1)^k}{2k!}\int_l^{l+1} E_k(t-l)f^{(k+1)}(t)dt.$$

Finalmente, basta tomar la suma alternada, intercambiar el orden de las sumas e identificar una suma telescópica para concluir que

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}f(l) &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}(f^{(j)}(l)+f^{(j)}(l+1))\frac{(-1)^{l+1}E_j(0)}{2\cdot j!} + \sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^{l+k}}{2\cdot k!}\int_l^{l+1}E_k(t-l)f^{(k+1)}(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{k}(f^{(j)}(1)+(-1)^{n+1}f^{(j)}(n+1))\frac{E_j(0)}{2\cdot j!} + \frac{(-1)^k}{2\cdot k!}\int_1^{n+1}(-1)^{[t]}E_k(t-[t])f^{(k+1)}(t)dt,\end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Ejemplo 2.21 (Sumas de potencias)**.** Para el caso $f(x) = x^m$ observamos que $f^{(l)}(x) = l(l-1)\cdots(m-l+1)x^{m-l} = l!\binom{m}{l}x^{m-l}$, para $l = 0,1,\ldots,m-1$, $f^{(m)}(x) = m!$ y las demás derivadas son nulas. Por tanto, la fórmula de Euler-MacLaurin aplicada a orden $k = m+1$ como en la Nota 2.4 toma la forma

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} j^m &= \int_0^n t^m dt + \frac{n^m}{2} + \sum_{j=2}^{m}\frac{B_j}{j!}\binom{m}{j-1}(j-1)!n^{m-j+1} \\ &= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}\frac{B_j}{m-j+1}n^{m-j+1},\end{aligned}$$

en concordancia con la fórmula original de Bernoulli (1.2).

Ejemplo 2.22 (Sumas alternadas de potencias)**.** De nuevo para $f(x) = x^m$, la fórmula de Euler-Boole aplicada a $k = m$ produce la relación

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}j^m &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(1)\frac{E_j(0)}{j!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(n+1)\frac{E_j(0)}{j!} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}j!\frac{E_j(0)}{j!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}j!(n+1)^{m-j}\frac{E_j(0)}{j!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2}E_m(n+1) + \frac{E_m(1)}{2},\end{aligned}$$

obtenida en el Capítulo 1, ecuación (1.21). Note que hemos usado que $E_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} E_j(0)x^{m-j}$ válida por ser una sucesión de Appell.

Por su carácter clásico incluimos los siguientes ejemplos como aplicación de la fórmula de Euler-MacLaurin. Su análisis asintótico completo se puede consultar en [32, 47].

Ejemplo 2.23. Consideremos la función $f(x) = \ln(x)$, infinitas veces diferenciable para $x > 0$ con $f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}(m-1)!x^{-m}$. La fórmula de Euler–Maclaurin demuestra que

$$\begin{aligned}
&\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n) \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}\left(1 - \frac{1}{n^{2j-1}}\right) + \int_1^n \frac{B_{2m+2}(t-[t]) - B_{2m+2}}{(2m+2)t^{2m+2}}dt.
\end{aligned}$$

Este es el punto de partida para demostrar a través de un análisis más detallado que

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\exp\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}\frac{1}{n^{2j-1}} - \frac{1}{2m+2}\int_n^{+\infty} \frac{B_{2m+2}(t-[t]) - B_{2m+2}}{t^{2m+2}}dt\right),$$

expansión que contiene como caso particular la famosa fórmula de Stirling

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

De la misma manera, la función $f(x) = 1/x$ permite demostrar que los números armónicos satisfacen la relación asintótica

$$H_n = \gamma + \frac{1}{2n} + \ln(n) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{2j}\frac{1}{n^{2j}} + \widetilde{R}_f(n,m),$$

donde $\widetilde{R}_f(n,m)$ satisface $0 \leq (-1)^m \widetilde{R}_f(n,m) \leq \frac{|B_{2m}|}{2m}\frac{1}{n^{2m}}$, y

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n) \approx 0{,}57721,$$

es la constante de Euler-Mascheroni [47].

Conclusiones

Este trabajo está dedicado al estudio de los polinomios de Appell, como generalización de los polinomios de Bernoulli y de Euler, útiles en diversas ramas de las matemáticas. Estos polinomios, y más generalmente, los polinomios de Sheffer, son una rama activa de investigación como lo demuestran las numerosas publicaciones en el área. Es por tanto interesante lograr aportes en esta dirección de trabajo.

El desarrollo de esta memoria tuvo como punto de partida una aproximación a las sumas de potencias de enteros positivos a partir de una recurrencia integral. La primera conclusión es que dicha fórmula, también válida para los polinomios de Bernoulli y de Euler, no es un resultado aislado. Este es un hecho general satisfecho por cualquier sucesión de Appell. Dicha fórmula caracteriza además a cada una de estas sucesiones cuando consideramos de manera explícita el funcional lineal que las define.

Como segunda conclusión tenemos que la recurrencia integral que define a una sucesión de Appell determina una nueva caracterización de la misma. El Teorema 2.1 demuestra que esta fórmula recurrente es equivalente a las demás caracterizaciones conocidas, a saber, la forma de su serie generadora exponencial, la propiedad del valor medio o una fórmula por determinantes. Finalmente, estas diferentes aproximaciones permiten explorar casos particulares y obtener sistemáticamente propiedades conocidas de diversas familias de polinomios.

Apéndice 1. Integración numérica y números de Bernoulli

La fórmula de Euler-MacLaurin es una herramienta importante en análisis numérico que se implementa para aproximar integrales mediante sumas finitas. En efecto, su naturaleza nos permite entenderla como la regla del trapecio con términos de corrección. También admite generalizaciones basadas en la regla del punto medio, la regla de Simpson y las fórmulas de Newton-Cotes [38]. Cabe mencionar que esta fórmula ha sido aplicada para calcular numericamente las integrales de Fermi-Dirac [37]. En este apéndice recordamos rápidamente esta primera aproximación e incluimos algunos ejemplos numéricos experimentales.

El Teorema 2.2 muestra que al no tener en cuenta el resto dado por la correspondiente integral obtenemos la aproximación

$$\int_0^n f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(i) - \frac{f(0)+f(n)}{2} - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{B_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)\right],$$

Ahora, dada $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ podemos emplear $f(x) = g(a+xh)$, con $0 \le x \le n$, y $h = \dfrac{b-a}{n}$ para aplicar la fórmula anterior. Como $f(0) = g(a)$, $f(n) = g(b)$, $f'(x) = g'(a+xh)h$ y en general, $f^{(j)}(x) = g^{(j)}(a+xh)h^j$, remplazando estos valores en la fórmula anterior obtenemos

$$\int_a^b g(s)ds \approx h\sum_{j=0}^{n} g(a+jh) - h\frac{g(a)+g(b)}{2} - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{B_k}{k!}\left[g^{(k-1)}(b) - g^{(k-1)}(a)\right]h^{(k)}. \tag{2.13}$$

Pasamos ahora a analizar algunos ejemplos obtenidos a través de códigos en Python, ver Anexo 2

Ejemplo 2.24 (Integrales de funciones racionales)**.** Consideremos las integrales

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \approx 0{,}835648848264721,\\
I_2 &= \int_0^1 \frac{t-t^2}{1-t^5}dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t+t^2+t^3+t^4}dt = \frac{\pi}{5}\cot(2\pi/5) \approx 0{,}204153066138385,\\
I_3 &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}1107207345.
\end{aligned}$$

A través de la fórmula de Euler-MacLaurin, con parámetros $m = 10$ y $n = 10$, obtenemos los valores aproximados

$$\begin{aligned} I_1 &\approx 0{,}835648848265723, && \text{con error } e \approx 1{,}002112003442615 \times 10^{-12} \\ I_2 &\approx 0{,}204153066138405, && \text{con error } e \approx 1{,}9718854625505383 \times 10^{-14}, \\ I_3 &\approx 1{,}11072073454547, && \text{con error } e \approx 5{,}879038697751773 \times 10^{-12}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.25 (Integrales relacionadas con la fórmula de Abel-Plana)**.** Consideramos las tres integrales

$$2\int_0^\infty \frac{x^{2k-1}}{e^{2\pi x}-1}dx = (-1)^{k+1}\frac{B_{2k}}{2k}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{2x}{(e^{2\pi x}-1)(x^2+1)}dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{e^{2\pi x}-1}dx = \frac{1}{2(e^\lambda - 1)} - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4}, \ \lambda > 0,$$

donde B_{2k} denotan los números de Bernoulli y $\gamma \approx 0{,}57721566490153286060 6$, es la constante de Euler-Mascheroni. La última identidad se conoce como la fórmula de Legendre, ver [33, 32].

Para $k = 1$ se tenemos $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^{2\pi x}-1}dx = \frac{1}{24} = 0{,}041\bar{6}$. Por medio de (2.13), código (**??**):

Valores de los parámetros de la fórmula (2.13)			
Intervalo	Valor de n	Valor de m	Aproximación
$[0{,}1, 1]$	1	2	0,0523024815122233
$[0{,}01, 10]$	100	10	0,0400999427091633
$[0{,}01, 1000]$	100000	10	0,0400999427097122
$[0{,}01, 1000]$	100000	30	0,0400999427075379

Para el caso de la constante γ, obtenemos los valores:

Valores de γ			
Intervalo	Valor de n	Valor de m	Aproximación
$[0{,}1, 1]$	100	10	0,0501196857746366
$[0{,}01, 10]$	1000	10	0,574082320605662
$[0{,}001, 100]$	10000	10	0,5768978547701358
$[0{,}0001, 1000]$	100000	10	0,577259226721746

Finalmente, para $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{2\pi x}-1}dx = \frac{1}{2(e-1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \approx 0{,}0409884$, $(\lambda = 1)$ vemos que

En conclusión, la fórmula provee valores adecuados pero la cantidad de aproximaciones requeridas es muy alta en comparación con el margen de error obtenido.

Fórmula de Legendre, $\lambda = 1$			
Intervalo	Valor de n	Valor de m	Aproximación
$[0{,}1, 1]$	100	20	0,0271368528794799
$[0{,}01, 10]$	1000	20	0,0394216381130363
$[0{,}001, 100]$	100000	20	0,0408294483258599

Ejemplo 2.26 (Integral de Fermic-Dirac)**.** Las integral de Fermic-Dirac [37] se definen por

$$F_p(r) = \int_0^\infty \frac{x^p}{e^{x-r}+1}dx, \quad r \in \mathbb{R},\ p > -1,$$

tiene aplicaciones en astrofísica, física de estado sólido y electrónica. Para $p = 1$ y $r = 0$, es posible demostrar que

$$F_1(0) = \int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}dx = \frac{\pi^2}{12} \approx 0{,}822467.$$

Empleando la fórmula (2.13), se tienen los valores

Valores aproximados de integral $F_0(0)$			
Intervalo	Valor de n	Valor de m	Aproximación
$[0{,}1, 10]$	100	20	0,819550936713865
$[0{,}01, 100]$	1000	20	0,822442116757028
$[0{,}001, 1000]$	10000	20	0,822466783507446
$[0{,}0001, 1000]$	100000	20	0,822467030924195

Para $p = 2$ y $r = 1$, $F_2(1) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{e^{x-1}+1}dx$ se puede aproximar por

Valores aproximados de integral $F_2(1)$			
Intervalo	Valor de n	Valor de m	Aproximación
$[0{,}1, 10]$	100	20	4,31303738982418
$[0{,}01, 100]$	1000	20	4,32833098243165
$[0{,}001, 1000]$	10000	20	4,32833122538176
$[0{,}0001, 1000]$	100000	20	4,32833122562538

Para $p = 3$ y $r = 2$, $F_3(2) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^{x-2}+1}dx$ se aproxima a

Valores aproximados de integral $F_3(2)$			
Intervalo	Valor de n	Valor de m	Aproximación
$[0{,}1, 10]$	100	20	33,8400850902373
$[0{,}01, 100]$	1000	20	34,2982832609226
$[0{,}001, 1000]$	10000	20	34,2982832631222
$[0{,}0001, 1000]$	100000	20	34,2982832631224

Los números proporcionados en las tablas anteriores son correctos hasta en seis decimales, pero se requieren un paso de $n = 10^5$ de alto costo computacional.

Apéndice 2.
Códigos en Python

Algunos de los resultados obtenidos en esta memoria requirieron de experimentación computacional para establecer los patrones y fórmulas demostradas en el cuerpo del trabajo. Incluimos en este apéndice los enlaces a las recurrencias en Python que se diseñaron para tal fin.

- Suma de Potencias
- Suma Alternada de Potencias
- Polinomios de Bernoulli
- Números de Bernoulli
- Polinomios de Euler
- Números $E_m(0)$
- Potencias de Binomio
- Polinomios de Hermite probabilistas
- Polinomios de Hermite físicos
- Polinomios W
- Polinomios Bernoulli-Kummer
- Polinomios Bernoulli Orden 2
- Polinomios Bernoulli Orden 3
- Polinomios tipo Bernoulli de primer orden 3
- Polinomios tipo Bernoulli de segundo orden 1
- Polinomios tipo armónico
- Fórmula de Euler-MacLaurin

Bibliografía

[1] L. Aceto and I. Cação. A matrix approach to Sheffer polynomials. *J. Math Anal. Appl.*, 446(1):87–100, 2017.

[2] L. Aceto, H.R. Malonek, and G. Tomaz. A unified matrix approach to the representation of Appell polynomials. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 26(6):426–441, 2015.

[3] J. A. Adell and A. Lekuona. Binomial convolution and transformations of Appell polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 456(1):16–33, 2017.

[4] J. A. Adell and A. Lekuona. Closed form expressions for Appell polynomials. *Ramanujan J.*, 49:567–583, 2019.

[5] T. Apostol. A primer on Bernoulli numbers and polynomials. *Math. Mag.*, 81(3):178–190, 2008.

[6] P.E. Appell. Sur une classe de polynômes. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 9:119–144, 1880.

[7] F. Avram and M. Taqqu. Noncentral limit theorems and Appell polynomials. *Ann. Probab.*, 15(2):767–775, 1987.

[8] J. Beery. Sums of powers of positive integers. *Convergence*, July 2007.

[9] J. Bernoulli. *Ars conjectandi.* Thurneysen Brothers, Basel, 1713.

[10] J. Bernoulli and E. D. Sylla. *The art of conjecturing, together with letter to a friend on sets in court tennis.* Johns Hopkins University Press, 2006.

[11] R. P. Boas and R. C. Buck. *Polynomial expansions of analytic functions.* Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. Second ed. . 1. Folge. Vol. 19. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1964.

[12] J. M. Borwein, N. J. Calkin, and D. Manna. Euler-Boole summation revisited. *Amer. Math. Monthly*, 116(5):387–412, 2009.

[13] N. Bourbaki. *Fonctions d'une variable réelle. Théorie élémentaire.* Les Éléments de mathématique. Edition originale publiée par Hermann, Paris, 1976. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[14] B. Candelpergher. *Ramanujan summation of divergent series*, volume 2185 of *LNM*. Springer International Publishing, 2017.

[15] L. Comtet. *Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions.* Revised and enlarged edn. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

[16] F. A. Costabile and E. Longo. The Appell interpolation problem. *J. Comp. Applied Math.*, 236:1024–1032, 2011.

[17] F. A. Costabile and E.J. Longo. An algebraic approach to Sheffer polynomial sequences. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 25(4):295–311, 2010.

[18] F. A. Costabile and E.J. Longo. A determinantal approach to Appell polynomials. *J. Comp. Applied Math.*, 236:1528–1542, 2010.

[19] D. Drissi. Characterization of Kummer hypergeometric Bernoulli polynomials and applications. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 357:743–751, 2019.

[20] A. W. F. Edwards. A quick route to sums of powers. *Amer. Math. Monthly*, 93:451–455, 1986.

[21] C. Edwards. *The historical development of the Calculus.* Springer-Verlag, New York, 1979.

[22] A. Hassen and H. Nguyen. Hypergeometric Bernoulli polynomials and Appell sequences. *Int. J. Number Theory*, 5(4):767–774, 2008.

[23] F. Howard. Polynomials related to the Bessel functions. *Trans. Am. Math.*, 210:233–248, 1975.

[24] X. Hu and Y. Zhong. A probabilistic proof of a recursion formula for sums of powers. *Amer. Math. Monthly*, 127(2):166–168, 2020.

[25] M. Hurtado. *Observaciones sobre la suma de las m-ésimas potencias de los primeros n esteros positivos y algunos otros resultados relacionados.* Tesis de grado. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, 2013.

[26] K. Kanim. Proof without words: How did Archimedes sum squares in the sand? *Math. Mag.*, 74(4):314–315, 2001.

[27] A. Knoebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, and D. Pengelley. *Mathematical Masterpieces: further chronicles by the explorers.* Springer-Verlag, New York, 2007.

[28] H. K. Krishnapriyan. Eulerian polynomials and Faulhaber's result on sums of powers of integers. *College Math. J.*, 26(2):118–123, 1995.

[29] F. Marko and S. Litvinov. Geometry of figurate numbers and sums of powers of consecutive natural numbers. *Amer. Math. Monthly*, 127(1):4–22, 2020.

[30] L. M. Navas, F. J. Ruiz, and J. L. Varona. Appell polynomials as values of special functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 459(1):419–436, 2018.

[31] N. E. Nörlund. *Vorlesungen über differenzen-rechnung*, volume 13 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1924.

[32] F. W. Olver. *Asymptotics and special functions.* A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997.

[33] J.P. Ramis, S. A. Carrillo, and J. Mozo-Fernández. *Divergent Series: An introduction.* En preparación, 2020.

[34] S. Roman. *Umbral calculus.* Academic Press, Orlando, Florida, 1984.

[35] S. Roman and G. C. Rota. Umbral calculus. *Adv. Math.*, 27(1):95–128, 1978.

[36] G. C. Rota. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.

[37] G. Rzadkowski and S. Lepkowski. A generalization of the Euler-Maclaurin summation formula: an application to numerical computation of the Fermi-Dirac integrals. *J. Sci. Comput.*, 35:63–74, 2008.

[38] S. Sarafyan, L. Derr, and C. Outlaw. Generalization of the Euler-Maclaurin summation formula. *J. Math. Anal. Appl.*, 67:542–548, 1979.

[39] I. M. Sheffer. Some properties of polynomial sets of type zero. *Duke Math J.*, 5(3):590–622, 1939.

[40] J. Shohat. The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell. *Am. J. Math.*, 58(3):453–464, 1936.

[41] E. Suli and D. Mayers. *An introduction to numerical analysis.* Cambridge University Press., 2003.

[42] P. Sun. Moment representation of Bernoulli polynomial, Euler polynomial and Gegenbauer polynomials. *Statist. Probab. Lett.*, 77(7):748–751, 2007.

[43] B. Q. Ta. Probabilistic approach to Appell polynomials. *Expo. Math.*, 33(3):269–294, 2015.

[44] J. Tanton. Sums of powers. *Math Horizons*, 11(1):15–20, 2003.

[45] P. Tempesta. On Appell sequences of polynomials of Bernoulli and Euler type. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(2):1295–1310, 2008.

[46] W. Wang. A determinantal approach to Sheffer sequences. *Linear Algebra Its Appl.*, 463:228–254, 1939.

[47] R. Wong. *Asymptotic approximations of integrals.* SIAM, Classics in Applied Mathematics, 2003.

[48] Y. Yang. Determinant representations of Appell polynomial sequences. *Oper. Matrices*, 2(4):517–524, 2008.