Sucesiones de raíces polinómicas

Primitivo Belén Acosta Humánez*

Resumen

En este artículo se muestran dos resultados del autor, tales como la sucesión de cuadrados y la obtención de raíces de polinomios que tienen una secuencia en común. Solo se presentarán polinomios de segundo grado. La teoría está fundamentada en algunas propiedades de las sucesiones aritméticas.

Abstract

In this paper the author show two own results, such as the sequence of squares and the obtaining of roots of polynomials that have a common sequence. Only I will present polynomials of second grade. The theory is based in some properties of the arithmetic sequences.

Palabras clave. Sucesión aritmética, términos consecutivos, raíces polinómicas, cuadrados.

INTRODUCCIÓN

Una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se denomina aritmética si existe un número real r tal que para $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_i - a_{i-1} = r$. Véase al respecto [A3] y [A5] para una ampliación del tema. Iniciaremos enunciando un teorema clave para el desarrollo de la teoría que vamos a tratar.

TEOREMA

Si tres reales cualesquiera son términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón $r \in \mathbb{R}$, entonces el cuadrado del tercer término es igual al doble de la suma del cuadrado del segundo término con el cuadrado de la razón (r^2), menos el cuadrado del primer término.

* Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, email: primitivo.acosta@usa.edu.co

En Símbolos:

Si $a < b < c$ son tres reales que son términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón r, entonces:

$c^2 = 2(b^2 + r^2) - a^2$

Ejemplo

Sean 6, 8, 10 tres términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón 2, además se sabe que $6^2 = 36$, $8^2 = 64$; Nótese que:

$10^2 = 2(64 + 4) – 36$.

Se puede hacer un programa, ya sea en Prolog o Flex, que haga el listado de números cuadrados que uno quiera usando pocos comandos. Como ejemplo podemos hacer manualmente el listado de los diez primeros números pares al cuadrado.

$0^2=0$, $2^2 = 4$, luego

$4^2 = 2(4 + 4) - 0 =16$

$6^2 = 2(16 + 4) - 4 = 36$

$8^2 = 2(36 + 4) - 16 = 64$

$10^2 = 2(64 + 4) - 36 = 100$

$12^2 = 2(100 + 4) - 64 = 144$

$14^2 = 2(144 + 4) - 100 = 196$

$16^2 = 2(196 + 4) - 144 = 256$

$18^2 = 2(256 + 4) - 196 = 324$

$20^2 = 2(324 + 4) - 256 = 400$

Demostración

Si $a < b < c$ son tres reales que son términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón r^2, entonces:

$$
\begin{aligned}
&b = a + r, c = b + r;\\
&c^2 = (b + r)^2\\
&\quad = [(a + r) + r]^2\\
&\quad = (a + 2r)^2\\
&\quad = a^2 + 4a + 4r^2\\
&\quad = 2a^2 + 4a + 4r^2 - a^2\\
&\quad = 2(a^2 + 2a + 2r^2) - a^2\\
&\quad = 2[(a^2 + 2a + r^2) + r^2] - a^2\\
&\quad = 2[(a + r)^2 + r^2] - a^2\\
&\quad = 2(b^2 + r^2) - a^2
\end{aligned}
$$

Corolario 1

Si tres reales cualesquiera son términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón 1, entonces el cuadrado del tercer término es igual al doble de la suma del cuadrado del segundo término con uno (1), menos el cuadrado del primer término.

En Símbolos:

Si $a < b < c$ son tres reales que son términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón 1, entonces:

$$c^2 = 2(b^2 + 1) - a^2$$

Ejemplo

Sean 6, 7, 8 tres términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón 1, además se sabe que $6^2 = 36$, $7^2 = 49$; Nótese que:

$8^2 = 2(49 + 1) – 36$

Demostración

Si $a < b < c$ son tres reales que son términos consecutivos de una Sucesión Aritmética de razón 1, entonces:

$$
\begin{aligned}
&b = a + 1, c = b + 1;\\
&c^2 = (b + 1)^2\\
&\quad = [(a + 1) + 1]^2
\end{aligned}
$$

$$= (a + 2)^2$$
$$= a^2 + 4a + 4$$
$$= 2a^2 + 4a + 4 - a^2$$
$$= 2(a^2 + 2a + 2) - a^2$$
$$= 2[(a^2 + 2a + 1) + 1] - a^2$$
$$= 2[(a + 1)^2 + 1] - a^2$$
$$= 2(b^2 + 1) - a^2$$

Corolario 2

Si se tienen tres polinomios de grado dos, de tal forma que las raíces del primer polinomio, las raíces del segundo polinomio y las del tercer polinomio formen una sucesión aritmética de razón ρ, el coeficiente de la variable x del tercer polinomio es la suma del coeficiente de x del segundo polinomio con el doble de la razón aritmética. El término independiente del tercer polinomio es el doble de la suma del término independiente del segundo polinomio con el cuadrado de la razón, menos el término independiente del primer polinomio.

En símbolos:

Dados $x^2 + b_1x + c_1 = (x - r_1)(x - r_2)$ y $x^2 + b_2x + c_2 = (x - r_3)(x - r_4)$, entonces $x^2 + b_3x + c_3 = (x - r_5)(x - r_6)$, en donde $r_3 - r_1 = r_4 - r_2 = r_5 - r_3 = r_6 - r_4 = \rho$, $b_3 = b_2 + 2\rho$, $c_3 = 2(c_2 + \rho^2) - c_1$.

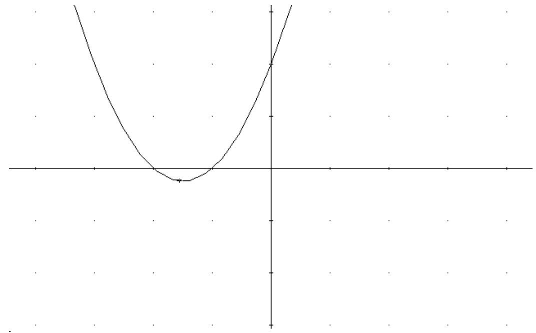
Demostración.
Se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 1.

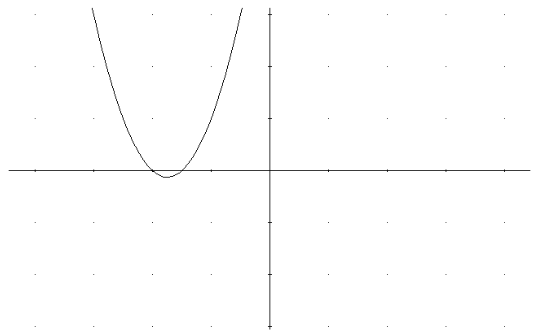
Dados los polinomios:

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ y $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$, se puede construir otro polinomio de tal forma que las raices sean -5 y -6, de la siguiente manera: $x^2+11x+30 = (x+5)(x+6)$, en donde 11 = 7 + 2x2 y 30 = $2(12 + 2^2) - 2$

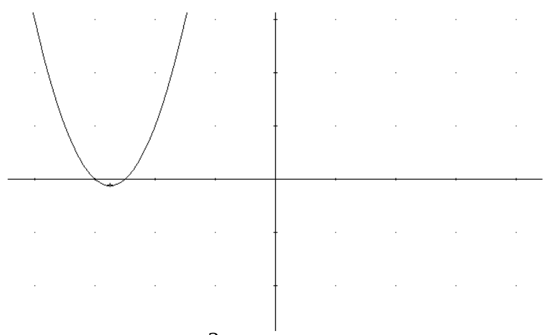
Veamos las gráficas:



$x^2 + 3x + 2$



$x^2+7x+12$



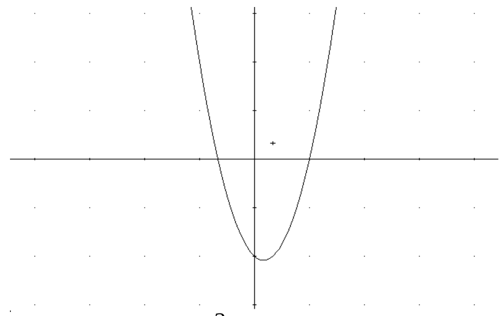
$x^2+11x+30$

Ejemplo 2.

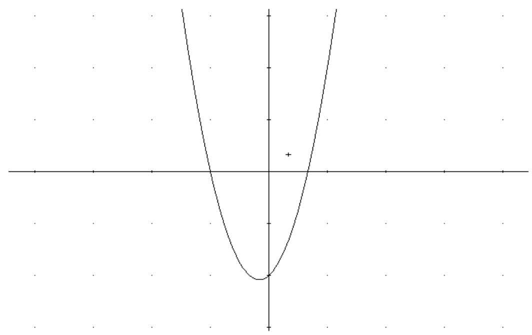
Dados los polinomios:

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ y $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, se puede construir otro polinomio de tal forma que las raices sean -1 y 4, de la siguiente manera:
$x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$, en donde 3 = 1 +2x1 y -4 = 2(12 +2^2) - 2

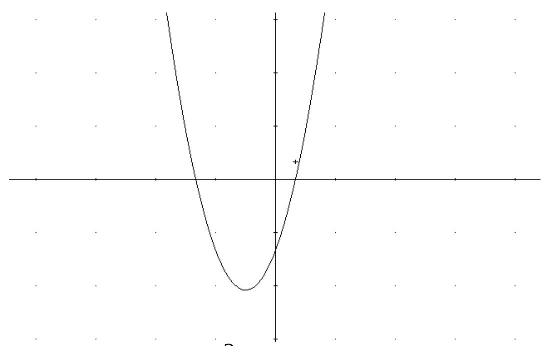
Veamos las gráficas:



$x^2 - x - 6$



$x^2 + x - 6$



$x^2 + 3x - 4$

Conclusión

Como conclusión importante se puede afirmar que se puede cubrir el eje x con parábolas cuyas raíces formen una sucesión aritmética.

Bibliografía

[A1] ACOSTA Primitivo. *Ley Costeana*. Memorias del primer encuentro nacional de estudiantes de matemáticas pag 64. Universidad del Cauca. Popayán, 1992

[A2] ACOSTA Primitivo. *Memorias del primer seminario de matemáticas y ciencias afines*. Tecnológico INESPRO. Bogotá D.C, 1996

[A3] ACOSTA Primitivo. *Algunas propiedades de las sucesiones aritméticas*. Revista Muzangá. Universidad de Sucre. Sincelejo, 1997

[A4] ACOSTA Primitivo. *Memorias del segundo seminario de matemáticas y ciencias afines*. Tecnológico INESPRO. Bogotá D.C, 1997

[A5] ACOSTA Primitivo. *Algunas regularidades de las sucesiones aritméticas*. Revista Notas de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá D.C, 1999.